

کنترل بهینه شار حرارتی سطحی در یک جسم دوبعدی با خواص وابسته به دما

فرشاد کوثری^{۱*} و سید مرتضی عظیمی^۲

^۱ دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران

^۲ دانش آموخته کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۶/۷/۷، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۸/۵/۲۸، تاریخ تصویب ۸۸/۶/۲۳)

چکیده

در این مقاله کنترل شار حرارتی سطحی در یک جسم دوبعدی با شکل دلخواه برای دستیابی به میدان دمایی با توزیع مشخص در مدت زمان معلوم بررسی شده است. روش گرادیان مزدوج به همراه معادله الحاقی به عنوان روشی مفید برای حل این مسئله به کار رفته است. کارایی این روش در مورد یک پروفیل آلومینیومی بررسی و نتایج برای سه نسخه متفاوت از روش گرادیان مزدوج، فلچر-ریویز، پولاک-ریبیر و پاول-بیل، با هم مقایسه شده‌اند. اثرات نرمال کردن بردار جستجو و افزودن جمله منظم‌کننده نیز بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند برای گام‌های زمانی بزرگ، نسخه پاول-بیل به همراه نرمال کردن بردار مسیر جستجو و برای گام‌های زمانی کوچک نسخه پولاک-ریبیر خطای کمتری را در میدان دمای محاسبه شده نهایی به دست می‌دهند. همچنین افزودن جمله منظم‌کننده، سبب کاهش دامنه نوسان شار تخمین زده، می‌شود.

واژه‌های کلیدی: هدایت حرارتی معکوس، کنترل بهینه شار حرارتی، گرادیان مزدوج، مرز مرکب

مقدمه

تحلیلی و عددی برای مدل‌سازی چنین فرآیندهایی لازم است.

درباره کنترل شار حرارتی سطحی برای دستیابی به توزیع دمای معین در یک جسم، لزیوس و ترالچ [۱] موضوع خنک‌کاری یک پروفیل فولادی با خواص ترموفیزیکی ثابت را بررسی کرده‌اند. پارک و کیم [۲] موضوع کنترل شار سطحی در یک سطح مقطع دوبعدی با خواص ثابت را با استفاده از روش کارهون-لوف-گالرکین حل کرده‌اند. علاءالدین و دومانیدیس [۳] راه حلی تحلیلی بر اساس روش انتگرال دوهمال ارائه دادند که از روش گالرکین برای بهینه‌سازی و توابع گرین به عنوان توابع آزمون استفاده می‌کند. آنها در مقاله خود به این نتیجه رسیده‌اند که برای این موضوع کنترلی، یک زمان بهینه و یک گام زمانی بهینه وجود دارد که در طی این بازه زمانی می‌توان اختلاف میان میدان دمای موردنظر و میدان دمای حاصل از این روش را کمینه کرد. هوانگ [۴] موضوع کنترل غیرخطی یک بعدی را در حالتی که خواص ترموفیزیکی جسم، تابعی دلخواه از دما است، بررسی کرد. او این موضوع را به صورت یک مسئله هدایت حرارتی معکوس غیر خطی در نظر گرفت و از روش گرادیان

هدف از انجام عملیات فرآوری فلزات، دستیابی به ماده‌ای با کیفیت مشخص، برای کاربردی خاص است. برای این هدف فلز باید ساختار متالورژیکی مطلوبی داشته باشد. از آنجا که ساختار متالورژیکی فلزات تابعی از دما و تغییرات آن است، یکی از راه‌های دستیابی به ساختار متالورژیکی مطلوب، انجام عملیات حرارتی (گرم و سرد کردن طبق الگویی مشخص) و تغییرات میدان دمای درون قطعه است. تغییرات ساختار متالورژیکی فلزات مختلف بر حسب دما را می‌توان از روی نمودارهای تبدیل فاز بررسی کرد.

نکته مهمی که در انجام عملیات حرارتی وجود دارد، الگوی گرمایش یا سرمایش قطعه با زمان است. شیوه‌هایی که مهندسان در انجام عملیات حرارتی به کار می‌برند، بر اساس نمودارها و نتایج حاصل از کارهای تجربی است. در نتیجه، باید برای هر کاربرد با توجه به عوامل مؤثر (جنس قطعه، ابعاد و هندسه آن، نوع انتقال حرارت و ...) آزمایشی تجربی را انجام داد، یا با استفاده از نتایج موجود، شرایط جدید را استنتاج کرد. از آنجا که نمونه‌سازی و انجام آزمایش برای هر کاربردی، نیازمند صرف وقت و هزینه زیاد است، بنابراین توسعه روش‌های

عملگر گرادیان است. در این حالت با داشتن مقادیر توابع $\bar{k}(\bar{T})$ و $\bar{C}(\bar{T})$ ، معلوم بودن شرایط اولیه T_0 و شار حرارتی $q_i(t)$ ، $i=1, \dots, M$ ، می‌توان در هر لحظه میدان دمای داخل ناحیه را به دست آورد.

برای بدون بعد کردن رابطه ذکر شده، مقادیر زیر را تعریف می‌کنیم:

$$T = \frac{\bar{T} - T_0}{\bar{T}_{Max} - T_0} \quad r = \frac{\bar{r}}{r_c} \quad t = \frac{k_c \bar{t}}{C_c r_c^2}$$

$$C = \frac{\bar{C}}{C_c} \quad k = \frac{\bar{k}}{k_c} \quad q = \frac{r_c \bar{q}}{T_{Max} k_c}$$

که در آن \bar{T}_{Max} دمای بیشینه میدان، r_c طول مشخصه و k_c و C_c نیز مقادیر معلومی هستند. با قرار دادن مقادیر بالا در رابطه (۱) داریم:

$$\nabla \cdot (k(T) \nabla T) = C(T) \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\left. k(T) \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma_i} = q_i(t) \quad i=1, \dots, M$$

$$T(\mathbf{r}, 0) = 0 \quad (2)$$

فرمولاسیون مسئله معکوس هدایت حرارتی

شرایطی را در نظر می‌گیریم که در آن، خواص ترموفیزیکی و هندسه میدان و شرایط اولیه جسم برای ما معلوم است. می‌خواهیم شارهای حرارتی سطحی $q_i(t)$ در بازه زمانی $0 \leq t \leq t_f$ را به گونه‌ای بیابیم که میدان دمای جسم در پایان این بازه زمانی، توزیع مورد نظر $T_d(\mathbf{r})$ را داشته باشد.

برای حل این مسئله معکوس، تابع خطا را به این ترتیب تعریف می‌کنیم:

$$E(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [T(\mathbf{r}, t_f; \mathbf{q}) - T_d(\mathbf{r})]^2 d\mathcal{A}$$

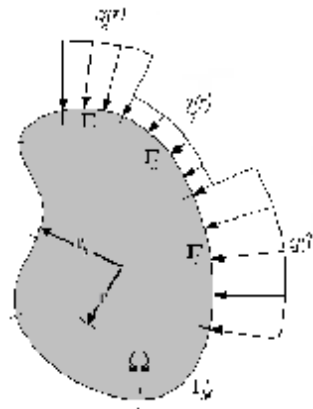
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \xi_i \int_0^{t_f} q_i^2(t) dt \quad (3)$$

که در آن $d\mathcal{A}$ المان سطح در دامنه Ω ، ξ_i عامل منظم‌کننده، $\mathbf{q} = [q_1(t), \dots, q_M(t)]^T$ بردار شار حرارتی سطحی و $T(\mathbf{r}, t_f)$ میدان دمای حاصل از \mathbf{q} در زمان پایانی t_f است. جمله اول در سمت راست جمله خطا، بیانگر مجذور اختلاف میان میدان دمای مطلوب و میدان دمای محاسبه شده است. بنابراین مسئله معکوس در اینجا یافتن بردار \mathbf{q} در رابطه (۳) به گونه‌ای است که تابع هدف

مزدوج به همراه معادله الحاقی برای یافتن گرادیان تابع هدف استفاده کرد. جیانگ و همکاران [۵] این موضوع را در حالت یک‌بعدی با استفاده از روش گرادیان مزدوج بررسی کرده و به این نتیجه رسیده‌اند که برخی شارهای حرارتی را می‌توان تا زمان بدون بعد 1.0 بازیابی کرد، اما در حالت کلی این روش می‌تواند شارهای سطحی را برای زمان 0.1 بازیابی کند. از آنجا که خواص فلزات مانند چگالی، ظرفیت گرمایی ویژه و ضریب رسانایی، تابعی از دما هستند، بنابراین لازم است که در معادلات و روابط مربوط به آن، این موضوع در نظر گرفته شود.

فرمولاسیون مسئله مستقیم هدایت حرارتی

در شکل (۱) ناحیه دو بعدی Ω با مرز مرکب $\Gamma = \bigcup_{i=1}^M \Gamma_i$ نشان داده شده است که هر مرز Γ_i با شار حرارتی سطحی $\bar{q}_i(\bar{t})$ قرار دارد. انتقال حرارت در داخل ناحیه از نوع هدایت حرارتی است و دما در هر نقطه داخل این ناحیه را با $\bar{T}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{t})$ نشان می‌دهیم.



شکل ۱: دامنه دو بعدی با مرز مرکب.

در حالتی که خواص ترموفیزیکی ماده وابسته به دما باشند، معادله انتقال حرارت در دامنه، غیرخطی و به این ترتیب است:

$$\nabla \cdot (\bar{k}(\bar{T}) \nabla \bar{T}) = \bar{C}(\bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} \quad i=1, \dots, M$$

$$\bar{k}(\bar{T}) \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} \right|_{\Gamma_i} = \bar{q}_i(\bar{t}) \quad (1)$$

$\bar{T}(\bar{\mathbf{r}}, 0) = T_0$
 که در آن $\bar{k}(\bar{T})$ رسانایی گرمایی در داخل جسم، $\bar{C}(\bar{T})$ ظرفیت گرمایی (حاصل ضرب چگالی در ظرفیت گرمایی ویژه) $(\bar{C}(\bar{T}) = \bar{\rho}(\bar{T}) \bar{c}(\bar{T}))$ ، دمای اولیه جسم و ∇

E را مینی‌مم کند.

روش گرادیان مزدوج

برای یافتن مینی‌مم تابع هدف E از روش گرادیان مزدوج [۶ و ۷] استفاده می‌کنیم. اساس این روش بر مبنای یافتن جهت‌های مزدوج در هر نقطه است. با داشتن جهت مزدوج S و طول گام بهینه α در این جهت، روش گرادیان مزدوج، در طی یک فرآیند تکراری مطابق رابطه زیر نقطه مینی‌مم تابع را می‌یابد:

$$q^{n+1} = q^n + \alpha^n \cdot S^n \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

شکل کلی جهت مزدوج که خود تابعی از q است، به این ترتیب است:

$$S^n = -\nabla E^n + \beta^n S^{n-1} + \phi^n S^m \quad (5)$$

که در آن β^n و ϕ^n ضرایب مزدوج و n مرتبه تکرار هستند. بالانویس m مرتبه تکراری است که در آن، عمل شروع دوباره در فرآیند تکرار در روش گرادیان مزدوج انجام می‌شود. روش گرادیان مزدوج بر حسب چگونگی یافتن جهات مزدوج، به سه نسخه متفاوت تقسیم می‌شود. در نسخه اول که به نسخه فلچر-ریویز معروف است [۸]، ضرایب β^n و ϕ^n به این شکل تعریف می‌شوند:

$$\beta^n = \frac{\int_0^{t_f} (\nabla E^n)^2 dt}{\int_0^{t_f} (\nabla E^{n-1})^2 dt}, \quad \beta^0 = 0 \quad (6)$$

$$\phi^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (7)$$

در نسخه دوم که نسخه پولاک-ریبیر نام دارد [۹]، ضرایب به این شکل هستند:

$$\beta^n = \frac{\int_0^{t_f} (\nabla E^n - \nabla E^{n-1}) \nabla E^n dt}{\int_0^{t_f} (\nabla E^{n-1})^2 dt}, \quad \beta^0 = 0 \quad (8)$$

$$\phi^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (9)$$

بیل و پاول بر اساس نسخه دوم، روابط زیر را برای ضرایب مزدوج ارائه دادند که نسخه پاول-بیل نام دارد [۱۰ و ۱۱]:

$$\beta^n = \frac{\int_0^{t_f} (\nabla E^n - \nabla E^{n-1}) \nabla E^n dt}{\int_0^{t_f} (\nabla E^n - \nabla E^{n-1}) \cdot S^n dt}, \quad \beta^0 = 0 \quad (10)$$

$$\phi^n = \frac{\int_0^{t_f} (\nabla E^{m+1} - \nabla E^m) \nabla E^n dt}{\int_0^{t_f} (\nabla E^{m+1} - \nabla E^m) \cdot S^m dt}, \quad \phi^0 = 0 \quad (11)$$

پاول، استفاده از روابط (۱۰) و (۱۱) را مستلزم استفاده از تکنیک شروع دوباره می‌داند. از این تکنیک زمانی استفاده می‌شود که گرادیان‌ها در تکرار مورد نظر، نامتعاد شوند؛ این خود معیاری از میزان غیرخطی بودن محلی مسئله است. همچنین زمانی که جهت به دست آمده به اندازه کافی، کاهش تابع را به همراه نداشته باشد، با شروع دوباره، جهت مزدوج اصلاح می‌شود. این کار با قرار دادن $\phi^n = 0$ در رابطه (۵) انجام می‌گیرد.

میزان نامتعاد بودن گرادیان‌ها در تکرار m را با معیار زیر می‌توان اندازه گرفت:

$$\left| \int_0^{t_f} (\nabla E^n - \nabla E^{n-1}) dt \right| \geq 0.2 \int_0^{t_f} (\nabla E^n)^2 dt \quad (12)$$

میزان کم بودن کاهش تابع در مسیر مورد نظر (بزرگ بودن زاویه بین جهت کاهش و منفی جهت گرادیان) در تکرار m را نیز می‌توان با هر یک از نامساوی‌های زیر بررسی کرد:

$$\int_0^{t_f} S^n \cdot \nabla E^n \cdot dt \leq -1.2 \int_0^{t_f} (\nabla E^n)^2 dt \quad (13)$$

$$\int_0^{t_f} S^n \cdot \nabla E^n \cdot dt \geq -0.8 \int_0^{t_f} (\nabla E^n)^2 dt \quad (14)$$

ضرایب 0.2، 1.2 و 0.8 در روابط بالا تجربی هستند.

در نسخه بیل-پاول، جهت کاهش (۵) برای $n \geq 1$ مطابق الگوریتم زیر محاسبه می‌شود:

۱- بررسی نامساوی (۱۲)؛ در صورت برقراری

تساوی، قرار دادن $q = n - 1$.

۲- محاسبه ضریب β^n ، از رابطه (۱۰).

۳- در صورتی که $n = q + 1$ ، قرار دادن $\phi^n = 0$

و در غیر این صورت محاسبه ϕ^n ، از رابطه (۱۱).

۴- محاسبه جهت کاهش از رابطه (۵).

۵- در صورتی که $n \neq q + 1$ ، بررسی نامساوی‌های

(۱۳) و (۱۴). در صورت برقراری هر یک از آنها،

قرار دادن $\phi^n = 0$ و محاسبه دوباره جهت

کاهش، از رابطه (۵).

$$D_i E(q_i) = \int_0^{t_f} \nabla E_i \cdot \Delta q_i \cdot dt \quad (20)$$

که در آن گرادیان ∇E_i برداری، به این ترتیب است.

$$\nabla E_i = \left[\frac{\partial E}{\partial q_i^1}, \dots, \frac{\partial E}{\partial q_i^N} \right]^T \quad (21)$$

که در آن N تعداد گام‌های زمانی است. از رابطه (۱۹) و با استفاده از تعریف دمای حساسیت (رابطه (۷)) داریم:

$$D_i E = \int_{\Omega} [T(\mathbf{r}, t_f) - T_d(\mathbf{r})] \Delta T_i(\mathbf{r}, t_f) \cdot d\mathcal{A} + \xi_i \int_0^{t_f} q_i \Delta q_i \cdot dt \quad (22)$$

برای یافتن گرادیان تابع خطا از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. برای این کار تابع خطا را به این شکل تعریف می‌کنیم:

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [T(\mathbf{r}, t_f) - T_d(\mathbf{r})]^2 d\mathcal{A} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \xi_i \int_0^{t_f} q_i^2(t) dt + \int_0^{t_f} \int_D \lambda(\mathbf{r}, t) \left[\nabla \cdot (k(T) \nabla T) - C(T) \frac{\partial T}{\partial t} \right] dt \cdot d\mathcal{A} \quad (23)$$

که در آن $\lambda(\mathbf{r}, t)$ ضریب لاگرانژ است. همانند آنچه که برای به دست آوردن معادله حساسیت انجام گرفت و با استفاده از رابطه دوم گرین و تبدیل انتگرال روی سطح به انتگرال خط روی مرز و با اعمال شرایط مرزی و اولیه معادله حساسیت به رابطه زیر می‌رسیم:

$$D_i E = \int_{\Omega} [T(\mathbf{r}, t_f) - T_d(\mathbf{r}) - \lambda \cdot C]^{t_f} \cdot \Delta T_i^{t_f} \cdot d\mathcal{A} + \int_0^{t_f} \left(\int_{\Gamma_i} \lambda \cdot d\Gamma_i + \xi_i \cdot q_i \right) \Delta q_i \cdot dt - \int_0^{t_f} \int_{\Gamma} k \cdot \Delta T_i \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial n} \cdot ds + \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left(k \nabla^2 \lambda + C \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) d\mathcal{A} \cdot dt \quad (24)$$

معادله الحاقی و شرایط مرزی و اولیه آن را به گونه‌ای تشکیل می‌دهیم که رابطه بالا مانند رابطه (۲۰) شود، در این صورت خواهیم داشت:

$$k(T) \cdot \nabla^2 \lambda + C(T) \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0 \quad (25)$$

$$\left. \frac{\partial \lambda}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0 \quad \Gamma = \bigcup_{i=1}^M \Gamma_i$$

$$\lambda(\mathbf{r}, t_f) = \frac{1}{C(T)} [T(\mathbf{r}, t_f) - T_d(\mathbf{r})], t = t_f$$

با قرار دادن $\beta^n = \phi^n = 0$ در هر تکرار، جهت کاهش S^n همان جهت گرادیان خواهد شد که معرّف روش کاهش سریع است.

معادله حساسیت

تابع حساسیت که از حل معادله حساسیت به دست می‌آید، به شکل مشتق جهتی میدان دما در جهت تغییرات کوچک Δq_i در تابع شار حرارتی q_i تعریف می‌شود. بنابراین دمای حساسیت برای شار q_i به این ترتیب تعریف می‌شود:

$$\Delta T_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T(q_i + \varepsilon \Delta q_i) - T(q_i)}{\varepsilon} \quad (15)$$

که در آن ε عامل کوچکی است. اگر مقدار q_i به اندازه Δq_i تغییر کند، در میدان دما اختلافی به اندازه ΔT_i ایجاد می‌شود. از آنجا که ضرایب $k(T)$ و $C(T)$ تابعی از دما هستند، بنابراین با تغییر میدان دما، در اندازه هر یک از این کمیت‌ها نیز تغییری ایجاد می‌شود. اگر میزان این تغییرات را با Δk_i و ΔC_i نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\Delta k_i = \frac{dk}{dT} \cdot \Delta T_i, \quad \Delta C_i = \frac{dC}{dT} \cdot \Delta T_i \quad (16)$$

همچنین می‌توانیم گرادیان k و C را نیز با استفاده از قانون مشتقگیری زنجیری به این ترتیب به دست آوریم:

$$\nabla k_i = \frac{dk}{dT} \cdot \nabla T_i, \quad \nabla C_i = \frac{dC}{dT} \cdot \nabla T_i \quad (17)$$

با استفاده از روابط (۵) و (۶) و تعریف دمای حساسیت و صرف نظر کردن از جملات غیر خطی مرتبه دوم، در نهایت معادله حساسیت را به این ترتیب به دست می‌آوریم:

$$\nabla^2 (k(T) \Delta T) = \frac{\partial}{\partial t} (C(T) \Delta T)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} (k(T) \Delta T) \right|_{\Gamma_i} = \Delta q_i \quad (18)$$

$$\Delta T(\mathbf{r}, 0) = 0$$

معادله الحاقی و معادله گرادیان

مشتق جهتی E در q_i را با $D_i E$ نشان می‌دهیم که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$D_i E = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E(q_i + \varepsilon \Delta q_i) - E(q_i)}{\varepsilon} \quad (19)$$

و با رابطه زیر به گرادیان مربوط است:

که در آن مقادیر ماتریس A و B به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \Delta T_i \Delta T_j d\mathcal{A} + \delta_{ij} \xi_i \int_0^{t_f} S_i^2 dt \quad (۳۲-الف)$$

$$B_i = - \int_{\Omega} (T_d - T) \Delta T_i d\mathcal{A} - \xi_i \int_0^{t_f} q_i S_i dt \quad (۳۲-ب)$$

که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر است که این‌طور تعریف می‌شود:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (۳۳)$$

معیار همگرایی

در صورتی که تغییرات مقدار تابع در دو تکرار متوالی از مقدار معینی کوچک‌تر شود، فرآیند تکراری را متوقف می‌کنیم:

$$\left| \frac{E(q^{n+1}) - E(q^n)}{E(q^n)} \right| \leq \varepsilon \quad (۳۴)$$

که در آن ε مقدار کوچکی است.

الگوریتم حل

- روند تخمین متغیرهای کنترلی (در اینجا شار) را می‌توان این‌طور جمع‌بندی کرد:
- یک مقدار اولیه به عنوان حدس اولیه برای مجموعه q_i ، $i = 1, \dots, M$ ، در نظر گرفته و قرار می‌دهیم $n = 1$.
- شرط همگرایی را بررسی می‌کنیم.
- حل معادله حرارت برای شارهای q_i (معادله (۲)) و یافتن میدان دما در پایان بازه زمانی $0 \leq t \leq t_f$.
- با حل معادله الحاقی، تابع الحاقی $\lambda(r, t)$ را به دست می‌آوریم (رابطه ۲۵ یا ۲۶).
- با استفاده از رابطه (۲۹) گرادیان تابع خطای E را محاسبه می‌کنیم.
- با استفاده از روابط (۵) مسیر جستجوی S_i^n را می‌یابیم.
- با قرار دادن $\Delta q_i = S_i^n$ و حل معادله حساسیت، تابع حساسیت میدان را برای زمان t_f به دست می‌آوریم (رابطه (۱۸)).

با انجام تغییر متغیر $\tau = t_f - t$ ، معادله (۲۵) را به معادله با شرایط اولیه تبدیل می‌کنیم:

$$k(T) \cdot \nabla^2 \lambda = C(T) \frac{\partial \lambda}{\partial \tau}$$

$$\left. \frac{\partial \lambda}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0 \quad (۲۶)$$

$$\lambda(r, 0) = \frac{1}{C(T)} [T(r, 0) - T_d(r)], \tau = 0$$

رابطه بالا برای همه سطوح با شار یکسان است. در این صورت رابطه (۲۴) به این شکل در می‌آید:

$$D_{\Delta q} E = \int_0^{t_f} \int_{\Gamma} (\lambda + \xi_i q) \Delta q ds dt \quad (۲۷)$$

با مقایسه رابطه بالا با رابطه (۲۰)، گرادیان تابع خطای E به این ترتیب به دست می‌آید:

$$\nabla E_i = \xi_i q_i(t) + \int_{\Gamma_i} \lambda(r_b, t) d\Gamma_i \quad (۲۸)$$

اندازه گام بهینه

برای به دست آوردن اندازه گام بهینه، روش‌های مختلفی وجود دارد که ما از روش بسط تیلور استفاده می‌کنیم. مقدار تابع خطا در تکرار $n+1$ برابر است با:

$$E(q_1^{n+1}, \dots, q_M^{n+1}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [T(r, t_f; q_1^n + \alpha_1^n S_1^n, \dots, q_M^n + \alpha_M^n S_M^n) - T_d(r)]^2 d\mathcal{A} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \xi_i \int_0^{t_f} (q_i^n + \alpha_i^n S_i^n) dt \quad (۲۹)$$

با استفاده از بسط تیلور و تعریف دمای حساسیت، رابطه بالا را نسبت به q_i^n خطی می‌کنیم:

$$E(q_1^{n+1}, \dots, q_M^{n+1}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [T(r, t_f; q_1^n, \dots, q_M^n) - T_d(r) + \sum_{i=1}^M \alpha_i^n \Delta T_i]^2 d\mathcal{A} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \xi_i \int_0^{t_f} (q_i^n + \alpha_i^n S_i^n) dt \quad (۳۰)$$

برای یافتن گام بهینه α_j^n ، $j = 1, \dots, M$ ، از رابطه بالا نسبت به α_j^n مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم که در نهایت به دستگاه معادلات زیر برای مقادیر α_j^n می‌رسیم:

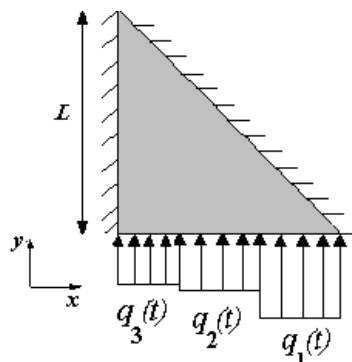
$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1M} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \dots & A_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_M \end{bmatrix} \quad (۳۱)$$

می‌خواهیم میدان دما در سطح مقطع به گونه‌ای باشد که دما از $T_b = 250^\circ C$ در سطوح با شار قطعه تا $T_c = 100^\circ C$ در نقطهٔ بالا سمت چپ قطعه به صورت یک تابع درجه ۳ به شکل زیر کاهش یابد:

$$T_d(r) = (T_c - T_b)(2r^3 - 3r^2) + T_c \quad (۲۷)$$

که r فاصله از نقطهٔ بالا سمت چپ است. در شکل (۳) میدان دما در سطح مقطع نشان داده شده است.

با توجه به تقارن میدان دما، می‌توانیم تنها $\frac{1}{2}$ از مقطع را به عنوان نمونه در نظر بگیریم (شکل ۴).



شکل ۴: قطع $\frac{1}{2}$ از سطح مقطع مربعی پروفیل.

ضلع پایین را به ۳ بخش، $x_2 \leq x < x_3 = L$ ، $x_1 \leq x < x_2$ و $0 = x_0 \leq x < x_1$ ، که به ترتیب شارهای q_1 تا q_3 بر آنها اعمال می‌شود، تقسیم می‌کنیم. دستگاه مختصات کارتزین (x, y) را برای تحلیل انتخاب می‌کنیم. برای حل معادلات حاکم، از روش تفاضل محدود و روش ADI استفاده می‌کنیم.

در جدول (۲) مقادیر به کار رفته برای این مسئله آمده است. در جدول (۳) برای چند مقدار نتایج حاصل در تخمین شارهای حرارتی سطحی با استفاده از سه نسخهٔ متفاوت روش گرادیان مزدوج، فلچر-ریویز، FR ، پولاک-ریبیر، PR ، و پاول-بیل، PB ، آمده است که در آن N تعداد تکرار (حداکثر ۷۰) و E تابع هدف (۳) است. متوسط خطای میدان دما به این ترتیب تعریف می‌شود:

$$ERR\% = \sum_{j=1}^{N_{xy}} \left| \frac{T_j - T_{dj}}{T_{dj}} \right| \div (N_{xy}) \times 100 \quad (۳۸)$$

که در آن N_{xy} تعداد گره‌های شبکهٔ حل معادلهٔ انتقال حرارت در مقطع شکل (۴) است.

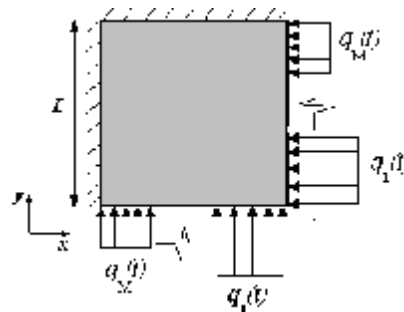
۸. با حل دستگاه (۳۱) مجموعهٔ مقادیر α_i^n را به دست می‌آوریم.

۹. قرار می‌دهیم: $q_i^n = q_i^{n+1} + \alpha_i^n S_i^n$ و $n = n+1$ و به گام ۲ می‌رویم.

نتایج

مطالعهٔ موردی

برای بررسی کارایی روش گرادیان مزدوج در کنترل شار حرارتی سطحی در یک جسم دوبعدی برای رسیدن به میدان دمای مشخص در یک زمان معین، یک پروفیل آلومینیومی با سطح مقطع مربعی شکل به طول L را در نظر می‌گیریم که دو سطح آن با شار یکسان و سطح دیگر آن عایق است. شکل (۲).

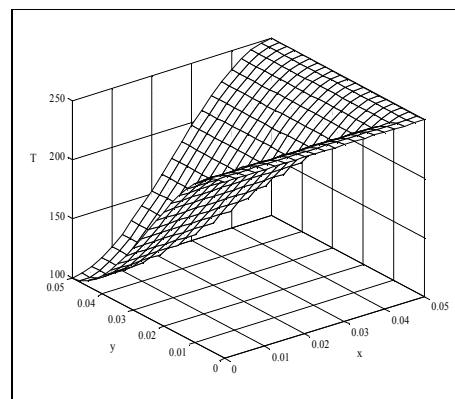


شکل ۲: سطح مقطع پروفیل آلومینیومی.

در جدول (۱) خواص ترموفیزیکی و ابعاد هندسی مقطع مورد نظر آمده است.

جدول ۱: خواص ترموفیزیکی و مشخصات قطعه.

$\bar{\rho}$ (kg/m^3)	$-0.208T + 2680.0$
\bar{c} ($J/kg^\circ C$)	$0.454T + 904.6$
\bar{k} ($W/m^\circ C$)	$0.04T + 153.1$
\bar{L} (m)	0.05



شکل ۳: میدان دمای هدف در سطح مقطع پروفیل.

جدول ۲: مقادیر عددی به کار رفته برای مسئله.

T_0	0.0 °C
t_f	10. s
$\Delta x, \Delta y$	$5. \times 10^{-4} m$
ε	0.001
$\xi_i, i=1, \dots, M$	0.0

همان‌طور که می‌بینیم نرمال کردن بردار جستجوی K در روش پاول-بیل مؤثر است، به طوری که برای گام‌های زمانی بزرگ روش پاول-بیل به همراه نرمال کردن نسبت به دو روش دیگر نتایج بهتری می‌دهد. اما نتایج برای گام‌های زمانی کوچک نرمال کردن مسیر جستجو در دو روش فلچر-ریویز و پولاک-ریبیر رضایت‌بخش نیست. بنابراین می‌توان گفت برای گام‌های زمانی بزرگ، روش پاول-بیل به همراه نرمال کردن و برای گام‌های زمانی کوچک، روش پولاک-ریبیر نتیجه بهتری می‌دهد. در شکل (۵) شارهای تخمین زده شده برای $\Delta t = 0.2 \text{ sec}$ از روش پاول-بیل همراه با نرمال کردن و در شکل (۶) شارهای تخمین زده شده برای $\Delta t = 0.25 \text{ sec}$ از روش پولاک-ریبیر نشان داده شده است.

بررسی اثر ضریب منظم‌کننده

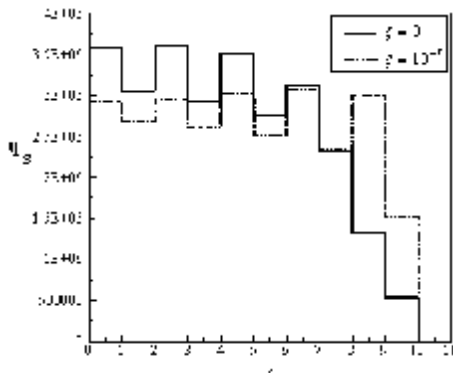
در شکل (۷-الف-ج) نمودار شارهای تخمین زده شده برای حالت $\Delta t = 1.0 \text{ sec}$ به روش فلچر-ریویز، با در نظر گرفتن $\xi = 10^{-7}$ و بدون نرمال کردن، نشان داده شده است. نمودار خط ممتد در حالت بدون جمله منظم‌کننده و نمودار خط چین برای حالت به کارگیری جمله منظم‌کننده با $\xi = 10^{-7}$ است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزودن جمله منظم‌کننده به عبارت تابع خطا، دامنه نوسان شار کاهش می‌یابد. البته با این کار، خطای متوسط میدان دما افزایش می‌یابد. در این حالت خطای متوسط برابر 6.6% دست می‌آید که حدود 80% بیشتر از حالت بدون منظم‌کننده است.

جدول ۳: نتایج حاصل از سه نسخه گرادیان مزدوج برای چهار گام زمانی.

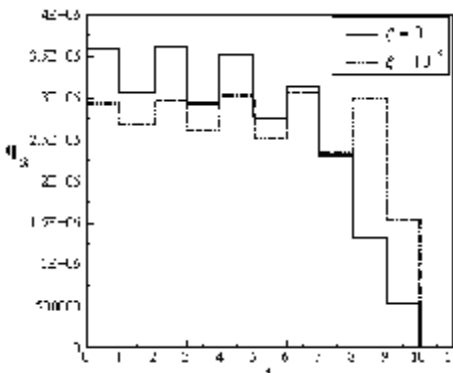
	$\Delta t = 2.$			$\Delta t = 1.$			$\Delta t = 0.5$			$\Delta t = 0.25$		
	FR	PR	PB	FR	PR	PB	FR	PR	PB	FR	PR	PB
N	4	7	21	70	24	42	51	39	56	29	7	70
ERR	17.5	15.8	15.0	3.7	17.8	16.1	8.9	2.7	2398	3.0	3.1	90.6
E	1.1e-2	9.7e-3	1.0e-2	5.6e-4	2.6e-2	1.7e-2	4.1e-3	2.8e-4	486.5	3.7e-4	4.1e-4	0.757

جدول ۴: نتایج حاصل از سه نسخه گرادیان مزدوج همراه با نرمال کردن مسیر جستجو.

	$\Delta t = 2.$			$\Delta t = 1.$			$\Delta t = 0.5$			$\Delta t = 0.25$		
	FR	PR	PB	FR	PR	PB	FR	PR	PB	FR	PR	PB
N	70	7	10	10	31	70	31	20	11	70	70	23
ERR	18.0	15.7	14.0	10.6	6.4	3.6	405.4	3.53	4.9	6.6	112	13.5
E	1.4e-2	9.6e-3	9.0e-3	9.0e-3	1.7e-3	5.3e-4	10.1	5.3e-4	1.1e-3	1.9e-3	1.38	1.9e-2

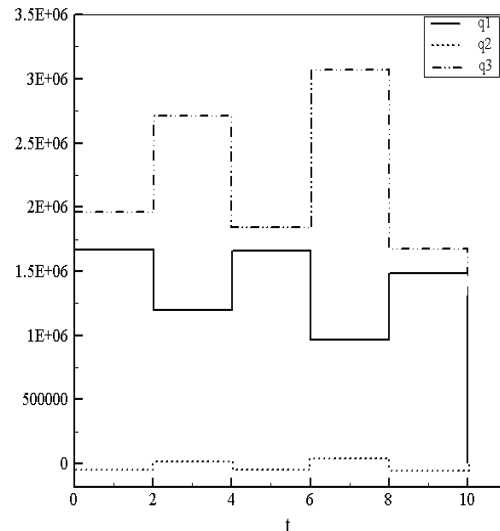


(ب)

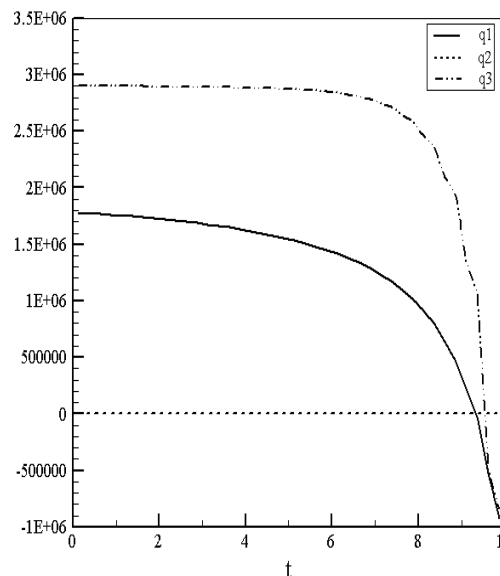


(ج)

شکل ۷: نمودار شارهای تخمین زده شده برای حالت روش فلچر-ریویز، الف) q_1 ، ب) q_2 ، ج) q_3 به روش پاول-بیل همراه با نرمال کردن، $\Delta t = 1.0 \text{ sec}$



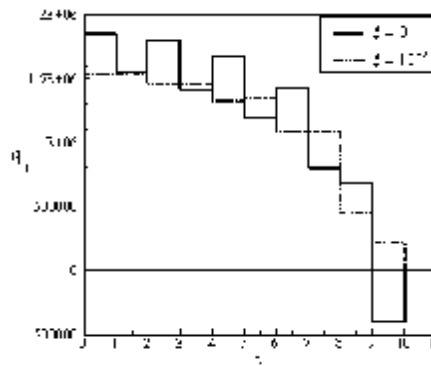
شکل ۵: شارهای تخمین زده شده برای $\Delta t = 0.2 \text{ sec}$ به روش پاول-بیل همراه با نرمال کردن.



شکل ۶: شارهای تخمین زده شده برای $\Delta t = 0.25 \text{ sec}$ به روش پولاک-ریبیر.

بحث و نتیجه گیری

در این مقاله مسئله کنترل غیرخطی شار حرارتی سطحی در یک جسم دوبعدی به کمک روش گرادیان مزدوج در حالتی که خواص ترموفیزیکی جسم تابعی از دما باشند، برای دستیابی به توزیع میدان دمای معین در جسم در پایان یک بازه زمانی و به روش تخمین تابع، انجام شد. سطح با شار جسم به بخش سطح با شار جسم به بخش‌هایی تقسیم شد که در هر سطح، شارهای حرارتی متغیر با زمان و مستقل از هم بر آنها اعمال می‌شود. مقایسه نتایج حاصل از سه نسخه متفاوت روش گرادیان مزدوج نشان داد که این روش به خوبی می‌تواند برای حل این مسئله کنترلی به کار رود. برای گام‌های زمانی بزرگ، نسخه پاول-بیل به همراه نرمال کردن بردار مسیر جستجو و برای گام‌های زمانی کوچک، نسخه پولاک-ریبیر خطای کمتری را در میدان دمای نهایی محاسبه شده به دست



(الف)

S : مسیر جستجو	می‌دهند. همچنین افزودن جمله منظم‌کننده، سبب کاهش دامنه نوسان شار تخمین زده شده می‌شود. هر چند که با این کار خطای متوسط میدان دما افزایش می‌یابد.
Ω : ناحیه دوبعدی	
Γ : مرز ناحیه	
ξ : پارامتر منظم‌ساز	
α : اندازه گام بهینه	
ϕ و β : ضرایب مزدوج	
ΔT : تابع حساسیت	
λ : تابع الحاق	
n : مرتبه تکرار	
b : مقدار در مرز قطعه	
c : مقدار در مرکز قطع	
d : دمای موردنظر در میدان	
i : اندیس	
	فهرست علائم
	q : شار حرارتی سطحی بدون بعد
	r : مشخه طول بدون بعد
	T : میدان دمای بدون بعد
	k : رسانایی گرمایی
	C : ظرفیت گرمایی
	t_f : زمان نهایی
	E : تابع خطا
	ERR : خطای متوسط میدان دمای محاسبه شد
	T_d : میدان دمای مطلوب ناحیه

مراجع

- 1 - Lezius, R. and Troitzsch, F. (1996), "Theoretical and numerical aspects of controlled cooling of steel profile." *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 94*, Wiley-Tenbner, PP. 380
- 2 - Park, H. M. and Kim, O. Y. (2000). "An inverse natural convection problem of estimating the strength of a heat source." *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 122, PP. 435-444
- 3 - Alaeddin, M. and Doumanidis, C. (2004). "Distributed parameter thermal controllability: A numerical method for solving the inverse heat conduction problem." *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 59, PP. 945-961.
- 4 - Huang, C. H. (2001). "A nonlinear optimal control problem in determining the strength of the optimal boundary heat flux." *J. Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 40, PP. 411-429.
- 5 - Jiang, H., Nguyen, T. H. and Prud'homme, M. (2005). "Control of the boundary heat flux during the heating process of a solid material." *Int. Comm. in Heat and Mass Transfer*, Vol. 32, PP 728-738.
- 6 - Rao, S. S. (1995). *Optimization, Theory and Applications*. Second Edition, New Age international (P) Limited Publishers, New Delhi.
- 7 - Jarny, Y., Ozisik, M. N. and Bardou, J. P. (1991). "A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction." *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 34, No. 11, PP. 2911-2919.
- 8 - Fletcher, R. and Reeves, C. M. (1964). "Function minimization by conjugate gradients." *Computer Journal*, Vol. 7, No. 2, PP. 149-154.
- 9 - Polak, E. (1971). *Computational Methods in Optimization*, Academic Press, New York.
- 10 - Powel, M. J. D. (1977). *Restart Procedures for the Conjugate Gradient Method*, Math. Program. Vol. 12., PP. 241-254.
- 11 - Beal, E. M. L. (1972). *A deviation of Conjugate Gradients*, in F. A. Lootsma ed., Numerical Methods for Nonlinear Optimization, Academic Press, London., PP. 39-43.