نقش عامل‌های بی‌بعد درهیدرولیک

نوشتهٔ

دکتر فیروز تربیت

استاد دانشکدهٔ فنی

مقدمه

درمقالهٔ مندرجه درشمارهٔ گذشتهٔ دانشکدهٔ فنی تحت عنوان: «محاسبهٔ افت فشار درلوله‌ها براساس فورمولهای نوین» نویسنده به‌قضیه‌های جدید قشرحدی وتحولی که این مفهوم جدید درعلم مکانیک سایعات بوجود آورده است اشاره نمود. بمنظور ادامه‌ی همان رویه وبا تأسی به‌خط مشی تجدید نظر در مطالبی که در برنامهٔ تعلیماتی دانشکده گنجانیده میشود درمقاله‌ی امروز رشته‌ی سخن به‌مبحث مهم «نقش عامل های بی‌بعد[1] درهیدرولیک اختصاص داده میشود».

بعد یا دیمانسیون[2] یک کمیت فیزیکی بوسیله دوسیستم واحدهای اصلی مشخص میشود.

درهردوسیستم طول که بعد آن به L وزمان که بعدآن به T نموده میشود مشترك بوده واختلاف آنها از نظر بعدهای اصلی در تعریف بعد سوم می‌باشد که برحسب قرار داد دریک سیستم نیروکه بعد آن به F نمایش داده میشود بعد اصلی سوم تلقی شده ودرسیستم دیگر جرم که‌بعد آن به M نمایش داده میشود بعنوان بعد اصلی سوم منظور گردیده است.

اولین شرط صحت یک معادله‌ی ریاضی که قانون فیزیکی معینی را بیان می‌نماید یکسانی بعد کمیت تشکیل دهنده دوطرف معادله است. بعبارت دیگر لازمست که مرتبه‌ی تکرار این بعدها که‌بصورت توان نوشته میشوند در دو طرف معادله یکسان باشند. توان بعدهای همانند مانند عمل ضرب توان های همپایه با هم جمع و یا ازهم تفریق میشوند. توجه به‌بعد معادله‌ها مبنای پیدایش عامل های بی‌بعد بوده وبسط وتوسعه بعدی استعمال این عامل‌ها در نتیجه‌ی نیازی بوده که درضمن تحقیق وتجسس در مکانیک مایعات احساس گردیده است.

یک ذره‌ی مایع جزئی ازیک محیط پیوسته وتغییرشکل پذیر[3] بوده که درایجاد سه‌نوع حرکت

---

۱) Paramètre sans dimensions ۲) Dimension ۳) Milieu continu et deformable

هندسی آن: دوران [۱] ـ انتقال[۲] ـ گردش[۳] تعداد زیادی نیرومیتوانند دخالت داشته باشند. بعلت تعداد زیاد نیروها مطالعه‌ی این مسئله ازنقطه‌ی نظر عمومی بوسیله‌ی ریاضیات فوق العاده مشکل وپیچیده میباشد.

مطالعه‌ی نوشته‌ی دانشمندان وریاضی دانهای گذشته مؤید این حقیقت است ونشان میدهد که کوششهای مداوم آنها دربدست آوردن فورمول ریاضی واحدی که بیان جمیع حالتهای جریان با آن میسرباشد بعلت زیاد بودن متغیرها با اشکال های لاینحل مواجه گردیده است ودانشمندان برای تسهیل مسئله و رسیدن به هدف غائی ناچار به قبول یکرشته فرض هائی میگردیدند که اغلب بعلت متکی نبودن آنها به حقیقت فیزیکی نتیجه های حاصله بصورت تضاد های هیدرودینامیکی[٤] بروزمی نمود. فکراستفاده ازمنبع های سرشارآب ومهار نمودن انرژی این ذغال سفید[٥] که سیر و گردش آن درطبیعت بصورت یک سیکل پیوسته دائماً درحال تکرار است ازقدیمترین دوره های تاریخ یکی ازمظهرهای تمدن بشری بوده ومهندسانی که شالوده‌ی پروژه‌های سفید همگانی از قبیل لوله کشی وآبیاری وسایر مصرفهای صنعتی آب را پی‌ریزی مینمودند نمیتوانستند در انتظار حصول نتیجه‌ی نهائی ازمطالعه‌ی دانشمندان بمانند وبدین علت کوشش خودرا صرف پیدا نمودن فورمولهای تجربی نمودند که درپاره‌ای موردها ابتکار وقضاوت شخصی را نیز درآن دخالت داده‌اند. اثرهای جاودان مهندسان مزبور درکلیه‌ی قاره‌های عالم بچشم میخورد و فورمولهائی راکه آنها وضع نموده‌اند هنوز هم درمحاسبه‌ی تأسیسات آبی مورد استفاده قرار میدهند.

ازآنجائی که تجربه یکی ازاساسی‌ترین طریقه های نیل به هدف درعلم فیزیک می‌باشد فورمولهای تجربی مهندسان بایستی بعنوان پایه‌های صحیح وغیرقابل انکاری تلقی گردیده و نحوه‌ی تلفیق وتطبیق آنها با نتیجه های علمی حاصل ازتحقیق دانشمندان وریاضی دانها موردبررسی قرار گیرد. روش تحقیق وتجسس علمی دانشمندان کنونی اینست که ابتدا عده‌ای ازاصل های فیزیکی راکه مبنای علمی ومنطقی دارند درمد نظر گرفته وسپس فورمولهای تجربی مهندسان وروشهای علمی ریاضی دانان راتوأماً مورد غورودقت قرارداده وفقط آن عده ازفورمولهای تجربی مهندسان راکه بتواند پدیده‌های فیزیکی وواقعی را با نتیجه‌ی بررسی دانشمندان تلفیق کند انتخاب می کنند وسپس براساس آن بررسی وانتخاب به انجام یک رشته تجربه های فیزیکی درلابراتوار می‌پردازند ونتیجه‌ی این تجربه هارا بکمک محاسبه های ریاضی برای رسیدن به هدف نهائی مورد استفاده قرار میدهند. نقش عمده‌ی عامل های بی‌بعد در همین مرحله و برای رسیدن به هدف نهائی روشن میشود زیرا عامل های مزبور خط مشی تجربه ها را براساس منطقی معین ساخته و بیان ریاضی قانون فیزیکی هیدرولیک نوین را نیز بطرز صحیح تری امکان پذیر نموده وقاطعیت میدهند.

تعریف عامل‌های بی بعد:

همانطورکه درمقدمه ذکرگردید مطالعه‌ی حرکت یک ذره‌ی مایع از نقطه‌ی نظر فعل و انفعال

---

۱) Rotation ۲) Translation ۳) Deformation pure ٤) Paradoxe hydrodynamique
٥) Houille blanche

فیزیکی فوق‌العاده پیچیده و مبهم بوده وعده‌ی متغیرهائی که در تغییر مکان وتغییر شکل ذره درطول زمان میتوانند دخالت نمایند زیاد میباشند . اما نظر باینکه پیدایش پدیده‌های مختلف فیزیکی بستگی کاملی به‌تغییر نسبی این متغیرها دارد طرز تفکر جدیدی در تجسس‌های هیدرولیکی مورد توجه قرارگرفته است. براساس این طرز تفکر جدید متغیر های مختلفی که تغییرهای نسبی آنها حین حرکت سیال‌ها باعث بروز پدیده‌های مختلف فیزیکی میگردند توأما در یک عامل بی‌بعد درهم آمیخته گردیده و بصورت یک متغیر بدون بعدی درمیآیند که دامنه‌ی تغییر آن با تأثیر نسبی هریک از متغیرهای جزء ارزیابی میگردد. بطور خلاصه‌عامل‌های بی‌بعد برای تعیین‌حدود تغییرهای هریک ازمتغیرهای جزء بهترین وسیله سنجش‌شناخته شده و استعمال آنها سبب عمومیت دادن قانون‌های مکانیک مایعات گردیده و به‌پیدایش فورمولهائی که درعین موجز بودن دارای پایه ومبنای علمی محکمتری بوده‌اند کمک کرده است.

عاملهای بی‌بعد بصورت ابزاری تحت اختیار محقق قرار میگیرد و بکمک آنها دامنه‌ی تفحص‌ها وتجسس‌های علمی درافق وسیعتری امکان پذیرگردیده است.

روش نوین کنونی که درمرکزهای تحقیق ولابراتوارهای مکانیک‌مایعات دنیا متداول است‌مبنی براینست که ابتدا بوسیله‌ی تجربه‌های مقدماتی کلیه‌ی متغیرهای مطلق راکه هریک بنحوی در فعل وانفعال‌های فیزیکی‌نقش اساسی‌دارند تعیین‌می‌کنند وازترکیب‌این متغیرهای‌مطلق‌عاملهای‌بی‌بعدرابوجود میآورند تا بدین وسیله معادله‌ی ریاضی حرکت سیال‌ها منجر به‌نوشتن یک رابطه‌ی کلی بین این گروه عاملهای بی‌بعد شود.

سپس برای پیداکردن مقدار عددی ضریب‌های این رابطه ـ با رعایت اصلهای منطقی و با توجه به‌قانون‌های اصلی مکانیک ـ تجربه‌های فیزیکی مجددی انجام میدهند تا تحقق فورمول نهائی فیزیکی که بدست آمده است به‌ثبوت برسد . اغلب فورمولهای ریاضی که اکنون در مکانیک مایعات متداول گردیده وقانون فیزیکی خاصی را بیان می‌نمایند بتوسط عامل‌های بی‌بعد نمایش داده میشوند.

درزیراصل پیدایش و نحوه دخالت عامل های بی‌بعد درحرکت مایعات مورد بحث قرارمیگیرد:

درحرکت یک‌ذره‌ی آزاد مایع نیروهای مؤثر برجرم آن راکه دراثرحرکت‌بوجود میآیند«نیروهای واکنش‌ماند»[1] می‌نامند. اصل تعادل دینامیکی دالامبر[2] بیان‌می‌کند که برآیند این نیروهای واکنشی ماند بایستی اثر برآیند کلیه‌ی نیروهای دیگر راکه برذره‌ی آزاد مایع تاثیر نموده ومولد حرکت‌آن‌میگردند (نیروهای حرکتی) خنثی نماید.

در اغلب پدیده‌های هیدرولیکی که در عمل‌بدانها برخورد میشود عده‌ی زیادی از نیروهای مؤثر فاقد اهمیت بوده ومیتوان از وجود ودرنتیجه ازتأثیر آنها صرفنظر نمود. در اینصورت غالباً یکی ازنیروهای مؤثر میتواند درحرکت ذره‌ی مایع بیشتر ازسایرین قدرت نمائی نموده وحرکت ذره مایع را بطورکلی تحت

---

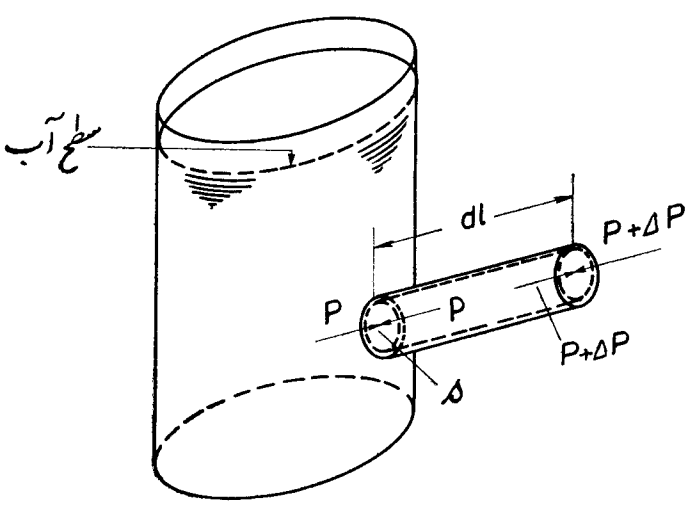
۱) Reaction d'inertie ۲) Principe d'equilibre dynamique d'Alembert

نفوذ و تأثیر خود قرار دهد. مطلبی که در اینجا بذهن خطور میکند اینست که آیا میتوان اندازه‌ی نیروی واکنشی ماند را محک واقعی ارزیابی تأثیر نسبی سایر نیرو ها شمرد ؟ جهت روشن شدن این مطلب طرفین معادله‌ی دالامبر را به نیروی واکنشی ماند تقسیم می‌نمائیم . جزء‌های مختلف معادله بصورت خارج قسمت دونیرو ظاهر میگردند. وچون خارج قسمت‌ها بدون‌بعد میباشند هریک ازآنها یک عامل بی‌بعد ومؤثر درتعادل دینامیکی حرکت ذره‌ی آزاد مایع خواهند بود. پرواضح است که عده‌ی عاملهای بی بعد موجود دراین معادله‌برابر خواهند بود با عده‌ی کلیه‌ی‌نیروها منهای‌یک. این‌عاملهای بی‌بعدیعنی‌عددی‌را درهیدرولیک‌بنام دانشمندانی نام گذاری کرده‌اند که درحقیقت مبتکر وضع قانون فیزیکی خاص مربوط به‌آن عامل بی‌بعد بوده‌اند.

بطور خلاصه عاملهای بی‌بعد ترکیبی ازمتغیرهای فیزیکی علم هیدرولیک بوده ودربوجود آوردن رژیم های مختلف جریان سیال‌ها نقش اساسی داشته و تغییر سایرکمیت های فیزیکی مورد مطالعه را تحت الشعاع خود قرار میدهند بهمین‌علت است که طریقه‌ی بدست‌آوردن این عاملهای بی‌بعدبطورانفرادی وبراساس طرز تفکری که فوقاً بتفصیل بیان گردید حائز اهمیت بوده ودراینجا مورد بررسی قرارمیگیرد.

عدد اولر [1]

ظرفی مانند شکل (۱) درنظر میگیریم که در قسمت پائین‌آن سوراخی بمساحت s تعبیه شده‌وقطعه لوله‌ی کوتاهی بطول dl و با مقطعی بمساحت s بدان متصل شده است. درظرف مزبورسطح آب درارتفاعی بالاتر ازمحور سوراخ نشان داده شده است. فرض کنیم درون لوله چوب پنبه‌ای بهمان مقطع s مانع از جریان آب گردد. واضح است که درنتیجه‌ی‌ارتفاع آب داخل ظرف، برهرواحد سطح چوب‌پنبه‌ی مزبورفشاری‌باندازه‌ی P که بطرف خارج متوجه‌است وارد میگردد، بطوریکه برای تعادل لازمست‌ازخارج نیروئی معادل‌ودرجهت مخالف P برچوب‌پنبه‌واردآورده‌شود. فرض‌می کنیم‌فشار P برروی‌چوب پنبه‌باندازه‌ی ΔP زیاد گردد ودرنتیجه چوب پنبه طول کوتاه dl را طی نماید وبعد ازآن مجدداً تعادل را برقرار نمایند. دراینصورت کارانجام‌یافته برابر است با $(\Delta P \times s) \times dl$ و مقدار آن برای واحد حجم مایع $\Delta P = \frac{\Delta P \times s \times dl}{s \times dl}$ میباشد.



شکل ۱

۱) Nombre Euler

بنابراین مقدار عددی ΔP معرف دو کمیت فیزیکی با بعدهای مختلف میباشند : فشار ـ کار و بهمین علت است که اولاً فشار در درون مایع کامل بصورت یک کمیت فیزیکی عددی و یا اسکالر[۱] خودنمائی میکند .

ثانیاً برای مقابله با انرژی پتانسیل U[۲] و ایجاد تعادل یک انرژی فشاری وجود دارد که آنرا انرژی درونی[۳] مینامیم . برای اینکه این انرژی درونی با انرژی پتانسیل جاذبه زمین U قابل مقایسه گردد مقدار ΔP را برای مقطعی به سطح واحد در تغییر مکانی باندازه‌ی واحد طول بوسیله‌ی $\mathcal{P}$ نمایش میدهیم .

میدانیم که مشتق پتانسیل جاذبه‌ی زمین در امتداد قائم برای واحد جرم مایع یعنی $\frac{\partial U}{\partial z} = \overrightarrow{\text{grad}(U)}$ (z امتداد قائم)، برابر است با شتاب ثقل $\vec{g}$. چون $\mathcal{P}$ طبق تعریف بالا انرژی واحد حجم است بنابراین انرژی واحد جرم $\frac{\mathcal{P}}{\rho}$ خواهد بود .

با توجه به وجود تعادل بین پتانسیل جاذبه‌ی زمین U و پتانسیل فشار $\mathcal{P}$ میتوان بکمک مشتق پتانسیل فشار ، شتابی بصورت $\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}\,\mathcal{P}}$ تعریف نمود . اما بطوریکه گفته شد در اثر حرکت ذره‌ی مایع نیروئی بصورت واکنش ماند بوجود میآید که مقدار آن برابر است با حاصلضرب جرم در شتاب این حرکت . اندازه‌ی نیروی مزبور برای واحد حجم مایع بوسیله‌ی مقدار $\frac{\overrightarrow{d}}{dt}(\rho V)$ تعریف میگردد که در آن V سرعت ذره‌ی مایع و ρ جرم مخصوص و $\frac{d}{dt}$ مشتق زمانی آن میباشد . این مقدار $\frac{\overrightarrow{d}}{dt}(\rho V)$ در اصطلاح مکانیک بنام تغییر مقدار حرکت در واحد زمان[۴] خوانده میشود . مسلم است که این تغییر مقدار حرکت دارای بعد نیرو میباشد .

بعلت ثابت بودن جرم مخصوص، ودائم درنظر گرفته شدن جریان، میتوان بجای $\frac{dV}{dt}$ معادل آن مقدار $\frac{dV}{dl}\times\frac{dl}{dt} = V\frac{dV}{dl}$ (l معرف طول مسیر میباشد)، یعنی مشتق طولی مسیر را قرارداد .

اگر مقدار $\rho V\frac{dV}{dl}$ که هم بعد نیرو است در فاصله‌ی dl ضرب شود کمیت حاصل بصورت انرژی و یا کار جلوه گر میشود و در اینصورت مقدار $\rho V dV$ عبارت میشود از کار نیروی واکنشی ماند در تغییر مکان نقطه‌ی تأثیر .

نظر باینکه اندازه‌ی سرعت در ابتدا صفر و در مرحله‌ی نهائی V می‌باشد انتگرال مقدار مزبور یعنی

---

۱) Scalaire ۲) Energie potentielle ۳) Energie interne

٤) Variation du quantité de mouvement

$\rho V^2/2$ نمایش انرژی سینتیک[1] واحد حجم بوده واندازه‌ی آن برابر است با تغییرانرژی درونی ΔP بعبارت دیگر $\Delta P = \rho V^2/2$.

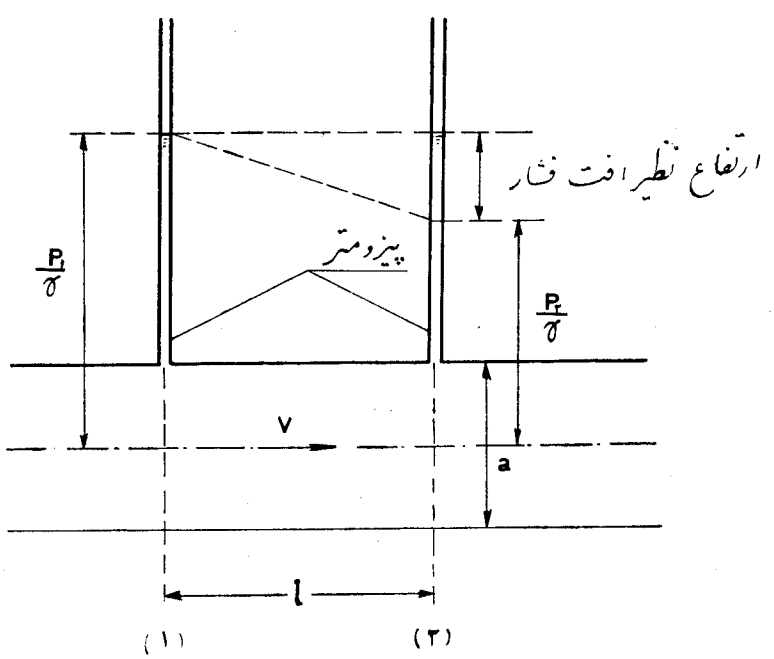
فرض اصلی در بدست آوردن این تساوی اینست که در تغییر مکان فوق هیچگونه اتلاف انرژی وجود نداشته باشد.

بطوریکه مسلم است اتلاف انرژی همیشه وجود داشته وتساوی فوق عموماً برقرار نخواهد بود. اما آنچه مسلم است میتوان خارج قسمت دومقدار فوق یعنی $\frac{\rho V^2/2}{\Delta P}$ را بصورت معیاری برای ارزیابی اینعدم تساوی بکار برد.

جذر نسبت دومقدار فوق را درهیدرولیک بصورت $E = \frac{V}{\sqrt{2\Delta P/\rho}}$ بیان نموده وآن را عدد اولر ویا ضریب جریان می‌نامند که یکی از عاملهای بی‌بعد اصلی میباشد. نسبت مزبور در حقیقت ترازنامه (بیلان) تبدیل انرژی نیروی فشاری وواکنش ماند را معین نموده ویکی ازمشخصه های حرکت سیال ها میباشد.

عدد رینولدز [2]

هرگاه مایع فوق العاده لزجی با ضریب لزجی دینامیکی μ از بین دو صفحه موازی بفاصله a (شکل ۱-۲) عبور نموده وحرکت آن منحصراً تحت تأثیر نیروهای لزجی صورت بگیرد ، در هیدرلیک ثابت می کنند که افت فشار که ارتفاع نظیرآن بین دومقطع بفاصله‌ی l بوسیله‌اختلاف ارتفاع سطح آب دردوعدد فشار سنج[3] که در ابتدا و انتهای فاصله‌ی مزبور نصب گردیده است اندازه گیری میشود از رابطه‌ی :



شکل ۱-۲- حرکت مایع لزج ازبین دوصفحه موازی

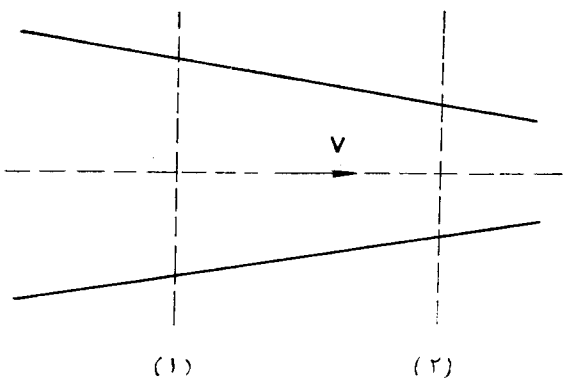
۱) Energie cinetique ۲) Nombre Reynolds ۳) Piezometre

$P_1 - P_2 = K\frac{\mu V l}{a^2}$ بدست میآید که درآن P_1 و P_2 اندازه‌ی فشارها در ابتدا وانتهای فاصله‌ی l بوده و V سرعت ماکزیمم مایع بین دوصفحه و K ضریبی عددی میباشد.

با توجه باینکه نسبت $\frac{l}{a}$ برابر یک عدد است میتوان با بکاربردن ضریب $K' = K\frac{l}{a}$ رابطه‌ی فوق را بصورت ذیل نوشت:

$$P_1 - P_2 = K' \frac{\mu V}{a}$$

در مرحله‌ی بعد فرض می‌شود که دو صفحه‌ی سابق بصورت مایل بوده ونسبت به همان محور افقی بطور متقارن قرار گرفته باشند.



شکل ۲-۲- حرکت مایع لزج ازبین دوصفحه‌ی مایل

اگر همان مایع لزج با سرعت Vی محوری از بین دو صفحه‌ی مزبور جریان پیدا نمایدقسمتی ازاختلاف‌فشارموجود بین دومقطع توسط نیروهای لزجی ازبین رفته وقسمت‌دیگر آن صرف تغییر انرژی سینتیک میگردد (شکل ۲-۲).

هرگاه سرعت درمقطع‌های ۲ و ۱ بترتیب V_2 و V_1 باشند اندازه‌ی افت فشار عبارتست از:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \rho V_2^2/2 - \rho V_1^2/2 + K''\frac{\mu V_2}{a} \quad (K'' \text{ ضریب عددی است})$$

ازتقسیم طرفین معادله‌ی فوق به‌مقدار $\rho V_2^2/2$ رابطه‌ی زیر نتیجه میشود:

$$\frac{\Delta P}{\rho V_2^2/2} = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 + K''\frac{\mu V_2/a}{\rho V_2^2/2}$$

هرگاه اندازه‌ی سطح مقطع‌ها بترتیب s_2 و s_1 باشند با توجه به‌رابطه‌ی پیوستگی چنین نتیجه میشود:

$$\frac{\Delta P}{\rho V_2^2/2} = \left[1 - \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2\right] + K''\frac{\mu V_2/a}{\rho V_2^2/2}$$

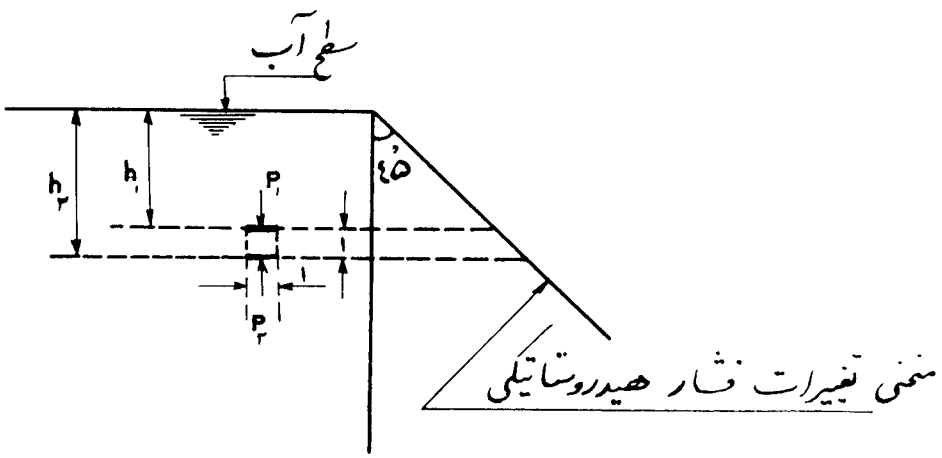
جمله‌ی طرف‌چپ رابطه‌ی بالا عکس مربع عدد اولر (E) میباشدکه عاملی‌بدون بعد است. بنابراین هریک از جمله‌های طرف ثانی معادله‌ی فوق نیز بی‌بعد میباشند. جمله‌ی اول سمت راست تابعی ازمقطع‌های عبور جریان میباشدکه بدون بعد است. هرگاه درجمله‌ی‌دوم سمت راست معادله‌ی‌فوق‌دقت شود با توجه‌باینکه نیروهای واکنشی ماند متناسب با ρV_2^2 و نیروهای لزجی متناسب با $\frac{\mu V_2}{a}$ میباشد ملاحظه میشود که مقدار نسبت فوق معرف تناسب موجود بین نیروهای واکنشی ماند ونیروهای لزجی است.

عکس جمله دوم که صرفنظر از ضریب‌های عددی آن مساوی $\frac{\rho V_2^2}{\mu V_2/a}$ میباشد موسوم است‌به‌عدد

رینولدز و آن را با Re نمایش میدهند. اگر μ/ρ را مساوی ν (ضریب لزجی حرکتی[1]) که دارای بعد L^2T^{-1} یا سرعت سطحی میباشد اختیار نمائیم $Re=\frac{Va}{\nu}$ خواهدشد. عدد رینولدز یکی دیگرازعاملهای اصلی درهیدرولیک میباشد. بنابراین ملاحظه میشود که درصورت پیدایش نیروهای لزجی وتأثیر آنهادرحرکت مایع عدد اولر تنها تابع بعدهای هندسی جدار ومقطع نبوده بلکه بستگی تامی به‌عدد رینولدز نیزدارد.

عدد فرود [2]

اگردرمایع ساکنی بوزن مخصوص γ ، دوسطح افقی بمقطع واحد زیر یکدیگر درعمق‌های h_1 و h_2 فرض کنیم (شکل ۳) و فشارهای مربوطه را P_1 و P_2 بنامیم نظر باینکه تغییر فشار هیدروستاتیکی میباشد رابطه‌ی $P_2-P_1=\gamma(h_1-h_2)$ برقرار خواهدبود. اگر P_1 $\Delta P=P_2-P_1$ و $\Delta h=h_1-h_2$ باشدواضح است که $\frac{\Delta P}{\Delta h}$ ویا نسبت تغییرهای دوکمیت فشار وارتفاع برابر وزن مخصوص γ خواهد بود یعنی $\gamma=\frac{\Delta P}{\Delta h}$ واگر h_1-h_2 را مساوی واحد فرض کنیم مقدارعددی ΔP مساوی وزن مخصوص‌مایع میگردد. درتعریف عدد اولر بیان شدکه دو مقدار ΔP و $\rho V^2/2$ بترتیب معرف فشار و واکنش ماند بوده و از نقطه‌ی نظر بعد یکسان می‌باشند.



شکل ۳

با توجه باینکه تغییر فشار درواحد ارتفاع هم بعد وزن مخصوص است و وزن مخصوص یکی ازمشخصه‌های حرکت سیالها می‌باشد با تقسیم نیروی واکنشی ماند $\frac{\rho V^2}{2}$ برطول l مسیر کمیتی هم بعدوزن مخصوص تعریف می‌کنند که بعد آن $\frac{\rho V^2}{L}$ است یعنی تغییرنیروی واکنشی ماند درواحد طول.

جذر نسبت وزن مخصوص‌مجازی بالا $\left(\frac{\rho V^2/2}{l}\right)$ به وزن مخصوص ثقلی γ را ، که عددی بدون

---

۱) Coefficient du viscosité cinematique ۲) Nombre Froude

بعد است، عدد فرود نامند طبق توضیح بالا مجذور عدد فرود عبارت خواهد بود از:

$$\frac{\text{وزن مخصوص مجازی نیروهای واکنش ماند}}{\text{وزن مخصوص ثقلی}} = \frac{\rho V^2/L}{2} = \frac{\rho V^2}{\rho g L} = \frac{V^2}{gL}$$

ودرنتیجه $\frac{V}{\sqrt{gL}}$ عدد فرود خواهد بود که آن را با Fr نشان میدهند $\left(Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}\right)$.

بطوریکه میدانیم علت واقعی نوشتن عدد فرود باین شکل اینست که درمورد جریان با سطح آزاد بتوان سرعت ذره‌ی مایع را با سرعت موج‌های ثقلی درسطح آزاد مقایسه نمود زیرا درسطح یک کانالی که عمق آب جاری آن L می‌باشد موجهای ثقلی حاصله درسطح آن با سرعت $\sqrt{gL}$ انتقال پیدا می‌نمایند.

عدد وبر[1]

در سیالها نیرو های خاص دیگری مثل نیروهای الکترو شیمی[2] بصورت جاذبه‌ی بین ملکولها خودنمائی‌میکند که از نقطه‌ی نظر فیزیکی با قانون جاذبه‌ی عمومی فرق اساسی داشته و حوزه‌ی تأثیر آنها محدود می‌باشد.

بعنوان مثال برای یک‌ملکول معینی که ازسطح آزاد آب دوراست نیروهای الکتروشیمی‌در کلیه‌ی سمت‌ها بطور یکسان تأثیر مینمایند وبنابراین منتجه‌ای برابرصفرخواهند داشت. درصورتیکه‌نیروهای مزبور، برای ملکولی که درمجاورت‌سطح آزاد سیال‌قراردارد منتجه‌ی قائم‌خواهنداشت. مؤلفه‌های‌مماسی‌نیروهای جاذبه‌ی ملکولی مولد نیروی کشش سطحی[3] می‌باشند که درنتیجه‌ی تأثیر توأم آن با دیگرنیروهای مؤثر، سطح آزاد مایع مساحت حداقل ممکن را اختیار مینماید.

نیروی کشش سطحی به‌منحنی محدود کننده سطح مایع عمود بوده و برسطح مایع مماس میباشد. با توجه بشرط تعادل ستون مایعی که درلوله‌ی موئی بالا میرود، معلوم میشود که نیروی کشش سطحی‌هم بعد $\frac{F}{L}$ (نیرو برطول) می‌باشد واین نیروها فقط موقعی بوجود میآیند که جریان مایع همراه باسطح آزادی بوده‌باشد. وجود نیروهای الکتروشیمی‌درتوزیع سرعت وفشار درنقطه‌های‌مختلف جریان تأثیر بسزائی‌خواهند داشت. بمنظور ارزیابی وسنجش تأثیر نسبی نیروهای‌الکتروشیمی که بصورت کشش سطحی‌خودنمائی‌میکنند عامل بی‌بعد دیگری نظیر عدد اولر - رینولدز و فرود تعریف میگردد. برای پیداکردن این عامل بی‌بعد روش استدلال مشابهی بقرار زیر بکار برده میشود:

تغییر نیروهای واکنشی ماند در واحد طول یعنی $\frac{\rho V^2}{L}$ را که هم‌بعدوزن‌مخصوص‌میباشد بایستی‌با یک کمیت مشابهی که درآن‌نیروهای کشش‌سطحی‌دخالت‌داشته‌باشند مقایسه‌نمود وچون‌نیروی کشش‌سطحی T هم بعد نیرو تقسیم برطول است برای آنکه کمیت هم بعد وزن مخصوص ازآن ساخته شود لازمست‌به L^2

---

۱) Nombre Weber ۲) Electrochimie ۳) Tension superficielle

تقسیم شود تا نیروی کششی واحد سطح تعیین گردد. بدین ترتیب جذر عبارت $\frac{\rho V^2/L}{T/L^2}$ عامل بی بعد نظیر عددهای اولر، فرود و رینولدز خواهد بود که موسوم است به‌عدد وبر و آن را بصورت $W=\frac{V}{\sqrt{T/\rho L}}$ می‌نویسند. اگرصورت و مخرج رابطه‌ی $\frac{\rho V^2/L}{T/L^2}$ درمقدار L ضرب‌شود صورت دوبرابر انرژی سینتیک‌واحد حجم مایع می‌باشد ومخرج نیز که کمیتی هم بعد با انرژی می‌باشد بصورت انرژی سطحی واحد حجم تعریف میگردد ودراینصورت عدد وبر عبارت خواهد بود از جذر دوبرابر انرژی سینتیک به‌انرژی‌سطحی برای واحد حجم مایع.

عامل‌های بی‌بعد وقانون‌های هیدرولیکی

در درس هیدرولیک دانشکده‌ی فنی از رویه‌ی نوین نشان دادن قانون‌ها بوسیله‌ی عاملهای بی‌بعد پیروی گردیده وبه بعضی‌عاملهای بدون‌بعد دیگری نظیر «**عامل عدم تعادل جریان**» که درمطالعه‌ی پدیده‌ی فیزیکی جریان درهم[1] درقشرحدی[2] حائز اهمیت فوق العاده میباشد اشاره میگردد. علم مکانیک‌مایعات حائز جنبه‌ی عمومی‌تری بوده ودرآن حرکت کلی هرنوع سیال بخصوصی مورد بررسی قرار میگیرد. بنابراین با توجه به‌فشار پذیری وهدایت گرما وسایر خاصیت‌های سیال‌ها دراین علم‌عددهای بدون بعد دیگری‌نظیر عدد ماخ[3] عدد پراندتل[4] وغیره نیز مورد تعریف قرارمیگیرند.

گرچه مورد استعمال عمده‌ی این عاملهای بی‌بعد در مطالعه‌ی قانون‌تجانس هیدرولیکی حرکت سیال‌ها می‌باشد و این بحث مهم از کادر مقاله‌ی کنونی خارج است ولی اینجا به ذکر یک نکته‌ی جالب توجهی مبادرت میشود. درجریان مایع هرگاه علاوه برفشار و واکنش ماند یکی دیگر ازنیروها مانندنیروی لزجی، ثقل ویاکشش سطحی تأثیر نماید برای تعادل بایستی چند ضلعی نمایش نیروها ـ که در فرض فعلی یک‌مثلث میباشد، بسته‌شود. با در نظرگرفتن مفهوم عاملهای‌بی‌بعد چنین‌نتیجه گرفته میشود که شرط وجود تجانس هیدرولیکی منجرمیشود برقرار بودن تشابه‌هندسی بین دومثلث.

در این مقاله عوض گسترش این بحث که موضوع استفاده از عاملهای بی‌بعد در آزمایشهای مدل کوچک باشد، ازنحوه‌ی تعیین قانون‌های فیزیکی درعلم‌هیدرولیک گفتگو میگردد.

هرگاه درداخل ظرفی‌سوراخ دار مایعی وجود داشته باشد وفشار درونی‌ظرف سبب جهش‌آن‌بخارج گردد بفرض عدم تأثیر نیروهای ثقلی خط‌های جریان لوله‌ای ونسبت به‌محورافقی مار از وسط سوراخ متقارن خواهد بود (شکل ٤). نیروهای محرك منحصر به‌نیروی فشار بوده وبه‌فرض صفر بودن اصطکاك تنهانیروی مقاوم، نیروی واکنش ماند ذره‌های مایع در حرکت خواهد بود.

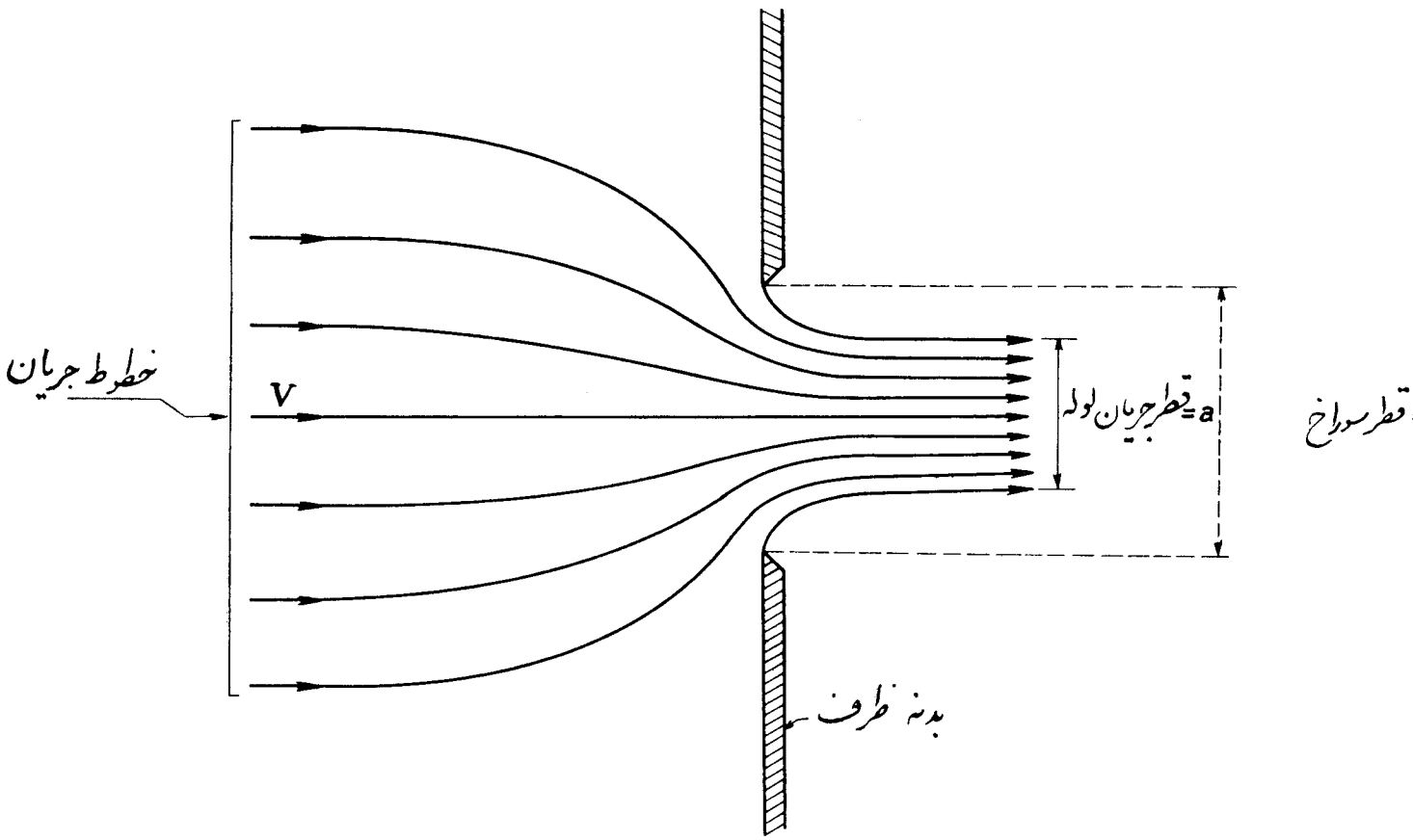
واضح است که کوچک شدن سطح مقطع لوله‌ی جهش جریان (a نسبت به‌عرض شکافی که مایع

---

۱) Turbulent ۲) Couche limite ۳) Mach ٤) Prandtl

ازآن عبورمینماید (a') بستگی به‌شکل وبعدهای هندسی‌جدار سوراخ داشته وبا توجه به‌فرضیه‌ی کامل‌بودن مایع میتوان با ترسیم‌شبکه‌ی جریان وبکمک‌ریاضیات ضریب جمع شدن مقطع لوله‌جهش طبیعی‌را پیدانمود.

دراینحالت‌ضریب جریان که با عدد اولربیان میشود منحصراً تابعی ازشکل وبعدهای هندسی‌جدار شکاف خواهد بود. اما تأثیر نیروهای دیگر:



شکل ٤

۱- تأثیر نیروی لزجی

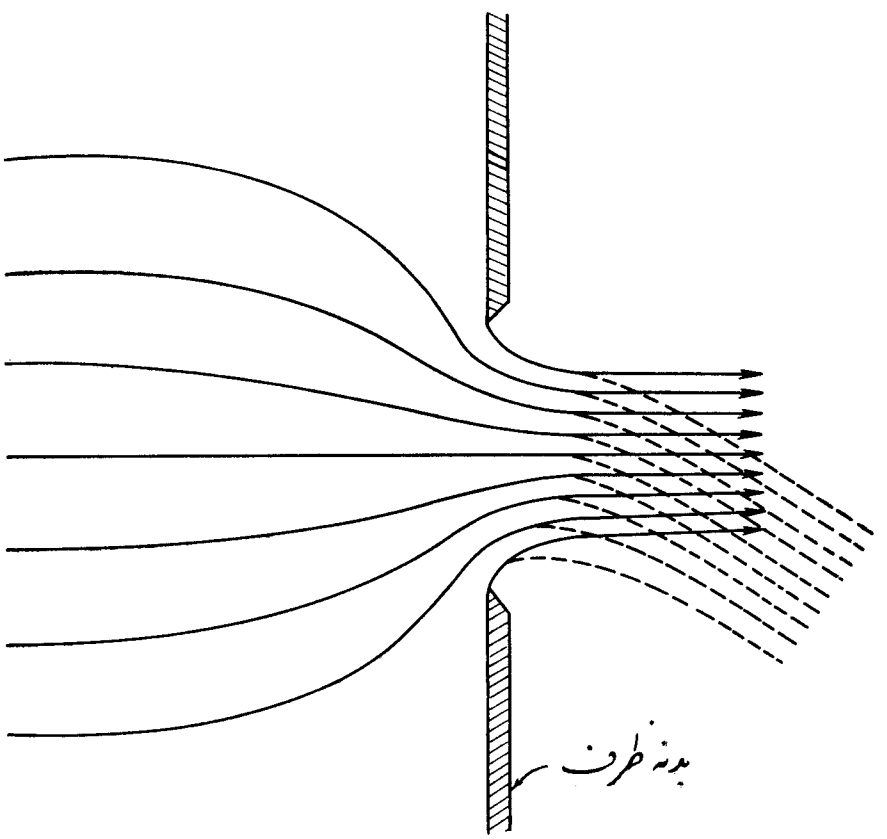
هرگاه تأثیر نیروهای لـزجی در این جریان شایان اهمیت گردد ، چون وضع عمومی جریان نسبت به‌محور افقی شکاف متقارن باقی خواهد ماند فورمولی که مربوط به (شکل ۲-۲) میباشد دراینحالت نیزصدق خواهد نمود. بنابراین درچنین حرکتی عدد اولر علاوه براینکه بستگی به‌شکل وبعدهای هندسی مقطع دارد تابعی ازعدد رینولدز نیز خواهد بود. بعبارت دیگر $E=f\left(\frac{a}{a'}\text{ و }Re\right)$

۲- تأثیر نیروی ثقل

(شکل ٥) لوله‌ی جهشی جریانی راکه از شکاف ظرف بطورمتقارن بخارج می‌جهد (فرض عدم تأثیر ثقل) با خط پرنشان میدهد.

اگر نیروهای ثقل در حرکت مایع کامل (یعنی مایعی با ضریب لزجی صفر) تأثیر نماید جهش لوله‌ای مایع - بطوریکه درهمان شکل نشان داده‌شده درصفحه‌ی قائم مار برمحورازحالت افقی‌انحراف‌حاصل نموده وبسمت پائین متمایل میگردد.

مسیر جهش لوله‌ای مایع وانحراف آن از حالت افقی بستگی به‌تأثیر نسبی نیروهای واکنشی ماند و نیروهای ثقلی دارد. در فرض دخالت سیال معینی هرچه سرعت جهش مایع زیادتر گردد انحراف بسمت پائین دورتر ازمخرج شکاف به‌وقوع می‌پیوندد وهرچه اختلاف وزن مخصوص بین مایع خارج شونده‌باسیال محیطی که مایع بدان‌داخل میشود کمتر باشد انحراف‌مفروضی ازمسیرمستقیم فاصله‌ی بیشتری ازمخرج‌شکاف خواهدداشت وبازاء صفر بودن وزن‌مخصوص سیال‌خارج، مسیربصورت یک‌سهمی شبیه به‌سهمی سقوط مایعی که سرعتی افقی درخلاء داشته باشد درمی‌آید.



شکل ه

انحراف‌جهش‌لوله‌ای جریان در(شکل ه) باخط نقطه چین نمایش داده شده است. در حالت تأثیر تنهای ثقل ضریب جریان کـه همان عدد اولر می‌باشد ، علاوه براینکه تابع شکل و بعدهای هندسی جدار $\left(\frac{a}{a'}\right)$ است به‌عدد فرود Fr نیز بستگی پیدا می کند بعبارت ریاضی $E=f\left(\frac{a}{a'}\text{ و }Fr\right)$ خواهد بود.

۳- تأثیرنیروهای کشش سطحی

اگر نیروهای کشش سطحی‌درجریان مایع تأثیری قابل‌مقایسه بانیروهای‌واکنشی ماند داشته‌باشند

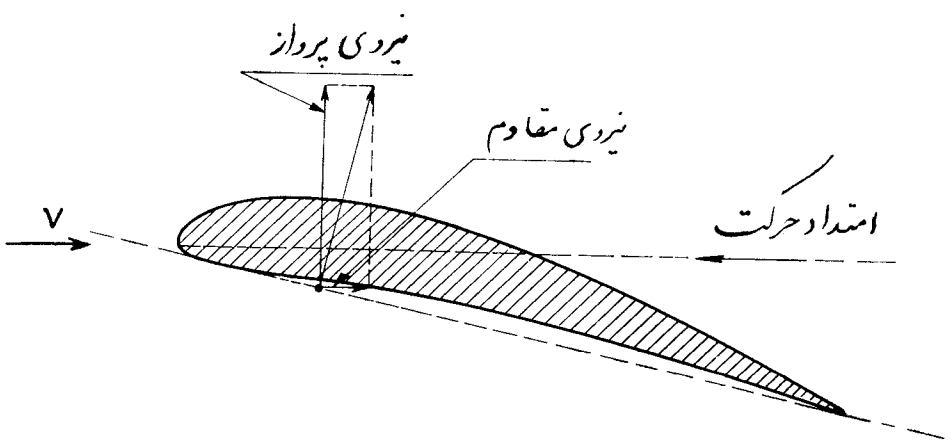
با استدلالی شبیه به آنچه فوقاً بیان گردید ضریب جریان و یا عدد اولر وابسته به آن مسلماً بصورت $E=f\left(\frac{a}{a'}\text{ و }W\right)$ یعنی تابعی ازنسبت اندازه‌های هندسی مقطع جهشی لوله وعدد وبرخواهد بود. بعلت چسبیدگی مسلم مایع به‌جدارکه دراثر نیروهای کشش سطحی ودرموقع خروج آب ازسوراخ بوجود می‌آید، بررسی تأثیر این نیروها در جریان مایع همواره ضروری است. واضح است که هرچه عدد وبرکوچکتر باشد تأثیر نسبی نیروهای کشش سطحی که زائیده‌ی جاذبه‌ی ملکولی است بیشتر است.

از مطالعه‌ی مجموعه‌ی مطلب هایی که ذکر گردید چنین نتیجه میشود که تأثیرنسبی نیروهای مشخصه‌ی یک جریان دررابطه‌ی موجود بین سرعت وفشار بوسیله‌ی عاملهای بی‌بعد بیان میگردد. عدداولر یا ضریب جریان درحالت کلی و وقتی مایع‌فشار پذیر نیست تابعی ازشکل و اندازه‌های هندسی مقطع شکاف وعدد های فرود وریتولدز و وبر خواهد بود.

بطورکلی‌ترسرعت V بوسیله‌ی‌عبارت‌ریاضی $V=Cf\left(\frac{a}{a'}\text{ و }W\text{ و }Fr\text{ و }Re\text{ و }\ldots\ldots\right)\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$ بیان میگردد که درآن C ضریب عددی ثابتی بوده ونقطه هایی که در داخل پرانتز قراردارند باید بوسیله‌ی‌نسبت سایر اندازه‌های هندسی که وجودشان درجریان مایع احتمالاً میتواند مؤثر باشد جانشین گردد.

نیروهایی که‌دریک مسأله هیدرولیکی دخالت مینمایند بوسیله‌ی‌شرط‌های‌بخصوص مسئله‌مشخص میگردند.

هرگاه فقط یکی از نیروها مثلاً نیروی لزجی، ثقل و یا کشش سطحی درحرکت مایع مؤثر باشند حد تغییر عامل های بی‌بعد نحوه‌ی تجربه‌های بعدی را که درلابراتوار بایستی‌انجام شود تعیین نموده‌وبدین‌ترتیب شکل تابع فوق از راه تجربه مشخص شده ومسئله حل میگردد. چنانکه مشاهده میشود با استعمال عاملهای بی‌بعد نه‌فقط عده‌ی تجربه‌های مورد نیازمحدود میگردد بلکه نحوه اجرای‌آنها نیز بعلت میزان‌تغییر این عاملها فوق العاده سهل تر میشود.



شکل ٦

برای اینکه آسان شدن حل مسأله‌های هیدرلیکی بکمک عامل‌های بی‌بعد واضح وروشن گردد و معلوم شود که تعقیب روش معمولی (بدون توجه به این عامل‌ها) متضمن چه مشکلاتی میباشد به ذکر یک مثال مبادرت میشود :

قبل از ذکر مثال لازمست مفهوم بعضی از اصطلاح‌های آئرودینامیکی [۱] بررسی گردد .

(شکل ٦) مقطع بال هواپیما را در مقابل جریان هوائی با سرعت افقی V نشان میدهد . نیروی مؤثر بر مقطع بال مزبور را میتوان به دومؤلفه متمایز تقسیم نمود :

۱ - مؤلفه‌ی افقی در امتداد سرعت که موسوم است به نیروی مقاوم [۲] .

۲ - مؤلفه‌ی قائم درامتداد عمودبرسرعت که موسوم است به نیروی پرواز [۳] .

اما آنچه بایستی دراینجا توجه نمود اینست که از فشار پذیری هوا در سرعتهای معمولی میتوان صرفنظر نموده هوا را یک سیال فشار ناپذیر تلقی نمود . دراینصورت استعمال هوا ویا آب درلابراتوار بدون تفاوت بوده ودرنتیجه‌ی آزمایش تغییری نخواهدداد . بعلاوه شکل جسم مورد آزمایش نیز بوسیله‌ی یک ضریب منظور میشود . پروفیل آئرودینامیکی ارتباط کاملی با مقدار این ضریب دارد .

باروشن شدن مفهوم چند اصطلاح آئرودینامیکی بالا اینک‌بحل مسأله‌ی زیرمبادرت میشود:

درون مایعی که ضریب لزجی دینامیکی‌آن μ وجرم مخصوص آن ρ میباشد ، کره‌ای فلزی به‌قطر d را باسرعت V تغییر مکان میدهند ، مطلوبست تعیین نیروی مقاومتی که مایع در مقابل حرکت این کره فلزی ایجاد مینماید .

نیروی مقاوم T که ازطرف مایع بر کره‌ی‌مزبورتأثیرمینماید تابع چهارمتغیر ρ و v و μ و d و بصورت تابعی مانند $T=f(d,\mu,v,\rho)$ می‌باشد . برای پیدا نمودن شکل تابع مزبور بطریقه‌ی عادی لازمست آزمایشهای زیادی در لابراتوار انجام دهند زیرا بعلت زیاد بودن متغیرها درهرسری آزمایشها فقط یکی از آنها را میتوانند تغییردهند . و نتیجه را بصورت دیاگرامی رسم نمایند بعنوان مثال با اختیار نمودن مایع معینی ρ و μ مشخص گردیده و با بکار بردن کره‌هائی بقطرهائی مثلاً d_1 و d_2 ..... d_{10} برای سرعتهائی مثلاً V_1 و V_2 ..... V_{10} مقدار T را بوسیله تجربه معین می کنند نتیجه‌ی این تجربه‌ها را روی دومحور مختصات عمود بریکدیگر که روی‌محور افقی‌مقدار dوروی‌محور قائم‌مقدار T را میبرند نقل کرده ومنحنی‌های هم سرعت را روی دیاگرام رسم می‌نمایند . بدینطریق معلوم میشود که رسم هردیاگرام اجرای صد تجربه را ایجاب مینماید . برای تکمیل کار لازمست تجربه‌های مشابه وبسیار دیگری را ابتدا برای ضریب‌های ثابت وجرم‌مخصوص‌های متغیر (مثلاً ρ_1 و ρ_2 ..... ρ_{10}) و سپس‌برای هرجرم مخصوص‌مشخص‌ρباضریب های μ متغیر (مثلاً μ_1 و μ_2 ..... μ_{10}) انجام دهندودیاگرامهای دیگری‌رسم کنند .بآسانی معلوم میشود چنین آزمایشهائی وجود کره‌هائی را بقطرهای مختلف و مایع هائی را به جرم مخصوص وضریب‌های‌لزجی

---

۱) Aerodyanmique ۲) Traînée ۳) Portance

متفاوت ایجاب مینمایدومقدارهائی که ازآزمایش ها بدست میآیند تنها بعد ازگرد آوری و طبقه بندی و انجام بعضی محاسبه های لازم و رسم دیاگرامهای متعدد قابل استفاده میشوند. واضح است که طریقه‌ی عادی مذکور درفوق با صرف وقت زیاد و زحمت فراوان توأم می‌باشد. اما روش استعمال عامل های بی‌بعد ، بطوریکه ذیلاً نشان‌داده خواهدشد کار را فوق‌العاده سهل مینماید. با آنکه درحرکت مزبور فقطنیروهای لزجی مایع تأثیر مینمایند ذیلاً نشان داده میشود که باروش استعمال عامل های بی‌بعد حتی اگر نیروهای ثقل نیز تأثیربنمایند شکل قانون فیزیکی با استدلال زیرین بصورت موجزی‌درمی‌آید. گواینکه‌نیروهای‌ثقل‌را هم بوسیله‌ی شتاب ثقل g دخالت دهیم (خوانندگان توجه دارند که اولاً این عمل درنحوه‌ی نتیجه گیری تأثیری ندارد و ثانیاً بطوریکه دیده خواهدشد میتوان در فورمول بدست آمده توان عدد فرود را مساوی‌صفر قرارداد تا تأثیر نیروهای ثقل از بین برده شوند و بنابراین دخالت دادن نیروهای ثقلی صرفاً حل مسئله‌ی دشوارتری را مطرح نموده‌است).

هرگاه توان های مجهول متغیرهای مطلق به x ، y ، t ، w نمایش داده شود . نیروی‌مقاوم T رامیتوان‌بصورت $T=Cd^x V^y \rho^z \mu^t g^w$ نوشت.

بطوریکه در ابتدای این مقاله‌ذکرگردید شرط اصلی صحت هررابطه‌ی فیزیکی آن است که بعدها درطرفین معادله یکسان باشند یعنی معادله‌ی بعدی زیرصحیح باشد :

$$MLT^{-2}=L^x(LT^{-1})^y(ML^{-3})^z(ML^{-1}T^{-1})^t(LT^{-2})^w$$

صحت گفته شده بوسیله‌ی تساوی بعد سه واحد اصلی بصورت زیر بیان میگردد:

$$1=z+t$$
$$1=x+y-3z-t+w$$
$$-2=-y-t-2w$$

ازسه معادله‌ی‌فوق میتوان‌مقدارهای‌سه‌مجهول مثلاً z و y و x را برحسب دو مقدار دیگر t و w بیان‌نمود:

$$x=2-t+w$$
$$y=2-t-2w$$
$$z=1-t$$

بنابراین میتوان شکل عمومی نیروی مقاوم T رابصورت‌زیر نوشت :

$$T=C\ d^{2-t+w}\ V^{2-t-2w}\ \rho^{1-t}\ \mu^t\ g^w$$

باتوجه به عبارت عامل های بی‌بعد که قبلاً داده شده و بعلت تأثیر نیروهای ثقلی و لزجی میتوان مجذور عدد فرود $\left(\frac{V^2}{gd}\right)$ وعدد رینولدز $\left(\frac{\rho Vd}{\mu}\right)$ را بنحوی‌ظاهرنمود. درنتیجه معادله‌ی‌نیروی مقاوم برحسب عامل های بی‌بعد بصورت زیردرمی‌آید :

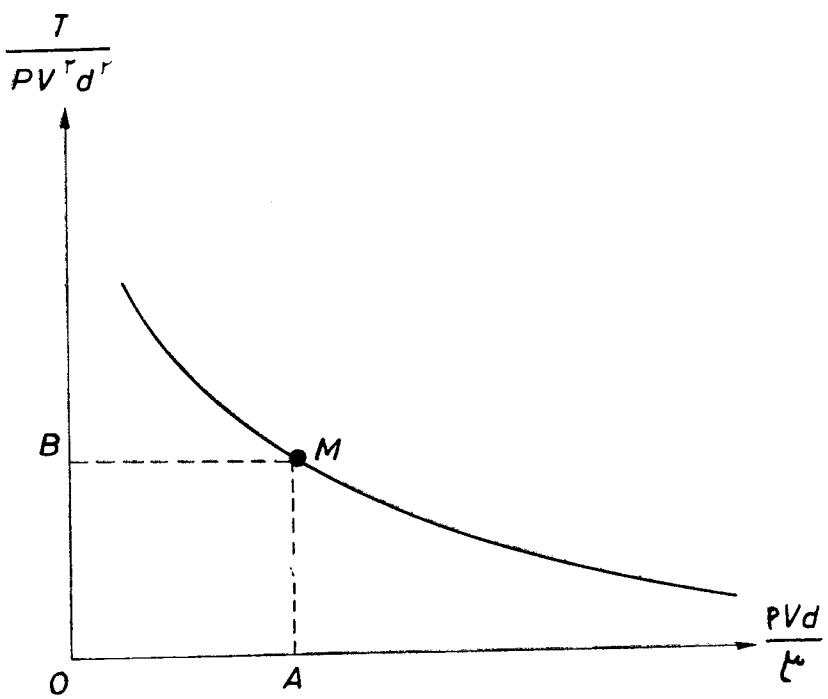
$$T=C\left(\frac{\rho Vd}{\mu}\right)^{-t}\left(\frac{V^2}{gd}\right)^{-w}\rho V^2d^2$$

حال اگرتأثیر نیروی ثقل قابل صرفنظر کردن باشد دخالت g بعنوان متغیر مورد نداشته لذا توان w مساوی صفر بوده و عدد فرود ازصحنه‌ی تأثیر نیروها خارج گشته و بمسئله ساده طرح‌شده برمیگردیم .

با توجه باینکه ρV^2d^2 هم بعد نیرو می‌باشد رابطه‌ی ساده‌ی زیر نتیجه میشود :

$$\frac{T}{\rho V^2d^2}=f\left(\frac{\rho Vd}{\mu}\right)$$

اگرمحور مختصات مسطحی درنظربگیریم که محور افقی آن نمایش عامل بی‌بعد رینولدز $\left(\frac{Vd\rho}{\mu}\right)$ و محور قائم آن نمایش کمیت بی‌بعد $\left(\frac{T}{\rho V^2d^2}\right)$ باشد، کافیست در مایعی با ضریب لزجی دینامیکی معین وجرم



شکل ۷

مخصوص معین کره‌ی‌ثابتی را با سرعتهای مختلف مثلاً سرعتهای ده‌گانه بحرکت‌درآورده و اندازه‌ی نیروی مقاوم T را باده تجربه‌ی ساده معین نمائیم ومقدارهائی‌که بدینطریق بدست میآیند بوسیله‌ی عددرینولدز $\frac{\rho Vd}{\mu}$ وکمیت بی‌بعد $\frac{T}{\rho V^2d^2}$ روی صفحه مختصات نمایش دهیم (شکل۷) .

بنابراین هرگاه در لابراتوار مایعی بجرم مخصوص ρ و ضریب لزجی دینامیکی μ مفروض باشد و گلوله‌ای بقطر d را درآن با سرعت دلخواه V تغییرمکان داده وبخواهند نیروی‌مقاومتی‌که مایع درمقابل آن ابراز می‌نمایدحساب کنند ، ابتدا عدد رینولدز وابسته به آن را حساب‌نموده و با استفاده از مقدارعددی

آن ومنحنی (شکل ۷) مقدار $\frac{T}{\rho V^2 d^2}$ را بدست میآورند و با ضرب کردن مقدار بدست آمده در $\rho V^2 d^2$ که مفروض است. نیروی مقاوم T معین میشود. از اینجا سهولت رسیدن به نتیجه بکمک عامل های بی‌بعد با مقایسه با روش عادی واضح میشود. باید دانست که اگر استفاده از ده تجربه برای تعیین مقدار عددی T با رویه بالا ضرورت‌داشته است به این علت است که‌ماقانون‌فیزیکی‌پدیده را برای تعیین توان t درمعادله‌ی $T = C\left(\frac{\rho Vd}{\mu}\right)^{-t}\rho V^2 d^2$ بکار نبرده‌ایم وحال آنکه میدانیم که در رژیم آرام نیروی مقاوم T باسرعت V بوسیله‌ی یک رابطه خطی مربوط میباشد.

بنابراین فقط با توجه به این حقیقت فیزیکی ، توان $t=1$ و $T=\frac{C}{Re}\rho V^2 d^2$ خواهد شد .

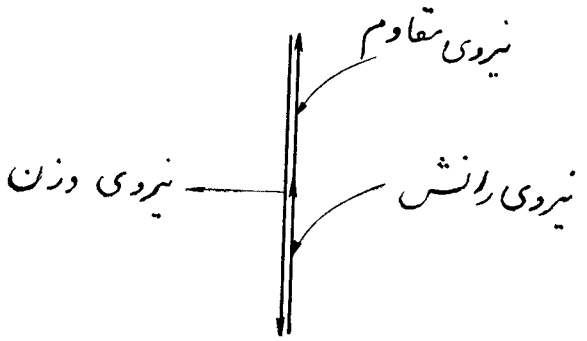
از معادله اخیر ممکن است چنین نتیجه گرفته شود که با انجام تنها یک تجربه مسألهٔ مورد نظر، حل خواهد شد بطوریکه میدانیم حل معادله‌های ناویه وستکس [1] درجمیع موردها امکان پذیر نبوده و حتی درموردهای ساده‌هم بدست‌آوردن‌نتیجه با اشکال ریاضی توأم می‌باشد. مسألهٔ که فوقاً مطرح شدیکی از آن حالت‌های خاصی است که جواب قطعی آن بتوسط معادله‌های ناویه وستکس مشخص گردیده است. هرگاه جوابی که بتوسط این روش ریاضی معین گردیده است با رابطه‌ی فوق که بتوسط عامل های بی‌بعد بدست آمده مقایسه گردد مقدار ضریب عددی C برابر 3π میشود. بنابراین فورمول نهائی نیروی مقاوم که از طرف مایع برکره‌ی مزبور تأثیری میکند عبارتست از $T=\frac{3\pi}{Re}\rho V^2 d^2$.

برای روشن شدن مورد استعمال فورمول نهائی به ذکر مثال عددی زیر مبادرت میشود .

مثال عددی : گلوله آهنی کروی شکل به قطر ۰٫۵ سانتیمتر و جرم نسبی ۷٫۸۵ دردرون مایعی که جرم مخصوص‌نسبی آن ۰٫۹ و ضریب لزجی دینامیکی آن معادل ۸ پواز است‌سقوط می‌نماید. مطلوبست تعیین‌سرعت‌حد گلوله مزبور ،اندازه عددرینولدز وبالاخره تعیین نیروی‌مقاوم T .

حل : نظربا‌اینکه گلوله‌وقتی به‌سرعت‌حد میرسد که‌حرکت آن یکنواخت و بنابراین برآیندنیروهای مؤثر صفر شود. بنابراین بایستی حاصلجمع نیروی مقاوم و نیروی رانش مساوی با وزن گلوله باشد.

(درشکل ۸)سه نیروی‌مذکوربوسیله‌ی سه حامل‌نشان‌داده شده‌اند و تعادل نیروهای سه‌گانه‌ی بالا بوسیله‌ی معادله‌ی ذیل بیان میشود .



شکل ۸

$$\frac{3\pi}{Re}\rho V^2 d^2 = (M - M')g$$

که در آن M جرم گلوله‌آهنی و M' جرم‌مایع هم حجم گلوله‌ی مزبور میباشد.

۱) Navier - Stokes

باجانشین کردن عبارت Re ومقدارهای عددی مفروض رابطه بصورت زیرمیآید.

$$۳\pi\mu ۷d = \frac{٤}{۳}\pi\left(\frac{d}{۲}\right)^{۳}(۷ر۸۵ - ۰ر۹۵)\times ۹۸۰$$

$$۵۷٦ \times V = ٦۷٦۲$$

واز رابطه‌ی فوق مقدار V بدست میآید $V = ۱۱ر۷۵$ ثانیه/سانتیمتر

اندازه‌ی عدد رینولدز مساوی‌است‌با:

$$Re = \frac{Vd\rho}{\mu} = \frac{۱۱ر۷۵ \times ۰ر۵ \times ۰ر۹۵}{۸} = ۰ر۷۰٤$$

اندازه‌ی نیروی مقاوم نیز مساوی است با :

$$T = \frac{۳\pi}{۰ر۷۰٤} \times ۰ر۹۵ \times (۱۱ر۷۵)^{۲} \times ۰ر۵^{۲} = ٤۳٦ \text{ دین}$$