طرز محاسبهٔ تغییرشکل و تنش‌های صفحه‌های گرد

نوشتهٔ :
دکتر مهندس محمد حسین کاشانی ثابت
معلم دانشکدهٔ فنی ورئیس شعبهٔ مهندسی راه وساختمان دانشکدهٔ صنعتی

اصطلاحات فنی

$a=$ شعاع تا تکیه گاه

$b=$ شعاع تا محیط یا لبهٔ آزاد صفحه

$D=$ صلبیت خمشی صفحه (Flexural Rigidity of slab) $=\frac{Et^{3}}{12(1-\nu^{2})}$ که E ضریب ارتجاعی جسم صفحه میباشد.

$t=$ ضخامت صفحه

$K=$ ضرایب

$M_r=$ لنگر خمشی شعاعی در واحد طول که در صفحهٔ قائمی که برشعاعی میگذرد اثرمیکند

$M_\theta=$ لنگر خمشی مماسی در واحد طول که درصفحهٔ قائمی که برمماس برشعاعی میگذرد اثرمیکند

$q=$ بار در واحد سطح

$V=$ نیروی برندهٔ موازی با محور قائم در واحد طول که برسطحی عمود برشعاع اثرمیکند

$w=$ تغییر شکل قائم سطح میانگین صفحه

$\nu=$ ضریب پواسون (Poisson 's Ratio)

$\frac{b}{a}=\beta$

$f'_c=$ تاب فشاری بتن (Ultimate Compressive Strength of Concrete)

$f_s=$ حد ترخص تنش کششی فولاد

$m=\frac{E_a}{E_b}$ که در آن E_a ضریب ارتجاعی فولاد و E_b ضریب ارتجاعی بتن میباشد

$v=$ تنش برنده یا تلاش برشی مجاز

$\frac{1}{2}f_c jk=R$

$j =$ نسبت فاصلهٔ (jd) منتجهٔ نیروهای فشاری وکششی بارتفاع مفید قطعات خمشی (d)

$(As)_t =$ سطح فولاد کششی مماسی

$(A_s)_r =$ سطح فولاد کششی شعاعی

$\Sigma o =$ مجموع طول محیط میله های فولادی

$d =$ ارتفاع مفید قطعات خمشی

$f_c =$ حد ترخص فشاری در بالاترین تار

$k =$ نسبت فاصلهٔ میان بالاترین تار و محورخنثی (kd یا kt) بارتفاع مفید (d) یا بکل ارتفاع (t)

$u =$ حد ترخص تنش چسبندگی میان فولاد وبتن

خلاصهٔ مقاله

دراین مقاله معادلهٔ با مشتق جزئی صفحه ها در دستگاه قطبی باحل آن ذکر شده ـ تنش ها ولنگرهای داخلی و رابطهٔ آنها با تغییر مکان قائم سطح میانگین صفحه داده شده ـ مواردا ستعمال آن در چهار حالت بررسی گردیده ـ درمثالیکه صفحه برروی تکیه گاهی میان مرکز ومحیط قرار دارد و تحت تأثیر بار هموار و یکنواخت باشد تغییرمکان ولنگرهای خمشی برای مقاطع مختلف و ترسیمه های لازم برای محاسبین داده شده است.

مقدمه

صفحه های گرد که تحت تأثیر بار هموار باشد دارای موارد استعمال متعدد میباشد ؛ از آنجمله است پوشش سرچاهها و قناتها ـ پوشش سقف ساختمان رستورانهائی بصورت (drive - in) – محاسبهٔ دقیق مخازن آب استوانی شکل وهم چنین درمهندسی مکانیک.

در این مقاله سعی شده است که مقدمات لازم بطور اختصار بیان گردد آنچنانکه مهندسان محاسب بتوانند در طرحها از آنها باا ندك صرف وقت استفاده نمایند.

مورد استعمال آخرین مقاله که فایدهٔ عملی برای طراحان دارد ازمقاله ایکه بوسیلهٔ نویسنده و آقای پرفسور Sergev استاد دانشگاه واشنگتن در شهر سیاتل نوشته شده و در آمریکای شمالی در فوریهٔ سال ۱۹۶۳ بچاپ رسیده اقتباس وترجمه گردیده است.

۱ ـ معادلهٔ با مشتق جزئی صفحه‌ها در دستگاه قطبی

معادلهٔ با مشتق جزئی صفحه ها در یک دستگاه مختصات قطبی بصورت زیر نوشته میشود[۱ و۲]*:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)=\frac{q}{D} \qquad (1)$$

که در آن $w - q$ و D بشرح زیر تعریف میگردد :

* اعدادیکه در ابروها نوشته میشود معرف نمره‌های مآخذ درفهرست منابع میباشد.

w تغییر شکل قائم سطح میانگین*

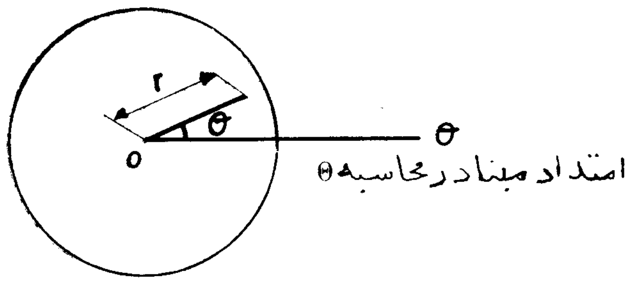
q بارهموار درنقطهٔ بمختصات r و θ (بشکل ۱ مراجعه شود)

D برابراست با :

$$D=\frac{Et^{3}}{12(1-\nu^{2})} \qquad (۲)$$

که آنرا صلبیت خمشی نامند .

E ضریب ارتجاعی جسم صفحه ـ t ضخامت آن و ν ضریب Poisson میباشد .



شکل ۱

بطوریکه دیده‌میشود معادلهٔ (۱) یک معادلهٔ مشتق جزئی غیر متجانس از رستهٔ چهارم میباشد . جواب این معادله از افزودن جواب معادلهٔ متجانس آن با جواب مخصوص آن بدست میآید .

از آنجائیکه‌حل این معادله در حالت کلی‌با مشکلاتی همراه است ، برای سهولت ازاین ببعدخود را محدود بحالاتی میکنیم که صفحه نسبت بمحور خود قرینه میباشد .

بافرض فوق‌الذکر نتیجه میگردد که‌تغییر مکان قائم هر نقطه از صفحه منحصراً تابع r و مستقل از θ میباشد. بنابراین تمام مشتقات w نسبت به θ صفر میگردد و معادلهٔ (۱) بصورت زیر نوشته میشود:

$$\nabla^{2}\nabla^{2}w=w''''+\frac{2}{r}w'''-\frac{w''}{r^{2}}+\frac{w}{r^{3}}=\frac{q}{D} \qquad (۳)$$

معادلهٔ (۳) یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی از رستهٔ چهارم میباشد .

۲ ـ حل معادلهٔ دیفرانسیل صفحه‌ها

آشکار است که معادلهٔ (۳) یک معادلهٔ دیفرانسیل غیر متجانس باضرایب متغیر میباشد. برای حل معادلهٔ متجانس آن بکمک تغییر متغیر Cauchy – Euler بصورت :

$$r=e^{t} \qquad (٤)$$

که در آن t یک تابع مستقل‌مانند r میباشد، معادلهٔ(۳) بمعادلهٔ‌دیفرانسیلی با ضرایب ثابت‌بدل میگردد که پس از حل آن جواب معادلهٔ متجانس چنین خواهد بود :

* ـ سطح میانگین آنست که ضخامت صفحه را در آن مقطع نصف میکند.

$$W_h = C_1 + C_2 \log_n r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \log_n r \qquad (5)$$

ضرایب $C_1 - C_2 - C_3$ و C_4 ثابت‌های انتگراسیون میباشد که باید محاسبه شود.

برای پیدا کردن جواب مخصوص معادلهٔ دیفرانسیل که آنرا جواب طرف ثانی معادلهٔ فوق نیز میگویند ، باید توجه داشت که شکل آن تابع q میباشد . در زیر درحالتی که q عدد ثابتی باشد آنرا حل میکنیم.

q مقداریست ثابت

برای تعیین جواب مخصوص دراین حالت اگر آنرا بصورت:

$$W = Cr^4$$

آزمایش کنیم (زیرا که W فقط تابعی است از r ومعادله معادله‌ایست از رستهٔ چهارم) با توجه بآنکه :

$$W' = 4Cr^3 \quad \text{و} \quad W'' = 12r^2 \quad \text{و} \quad \nabla^2 W = W'' + \frac{1}{r} W' = 16Cr^2$$

معادلهٔ (۳) نتیجتاً بصورت زیر نوشته میشود:

$$\nabla^2 \nabla^2 W = 64C = \frac{q}{D}$$

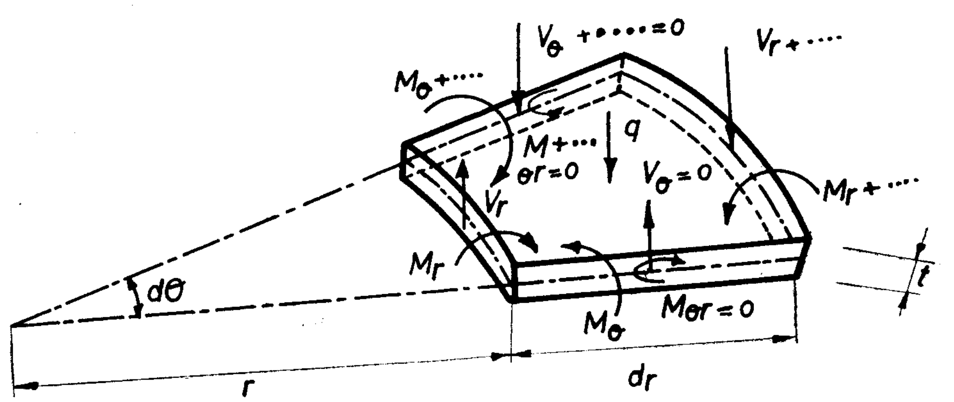
ازآنجا :

$$C = \frac{q}{64D}$$

خواهد بود وجواب عمومی معادلهٔ (۳) بصورت زیر نوشته خواهد شد:

$$W = C_1 + C_2 \log_n r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \log_n r + \frac{qr^4}{64D} \qquad (6)$$

۳- تنش‌ها ولنگرهای داخلی



شکل ۲

در (شکل ۲) عنصرجزئی ازصفحه که محصور بین θ و $\theta + d\theta$ و r و $r + dr$ میباشد بالنگرها ونیروهای مختلف نموده شده است. اگرصفحه ازتقارن برخوردار باشد دراینصورت:

$$V_\theta = O = M_{\theta r}$$

برای‌محاسبهٔ تلاش برندهٔ V_r ولنگرهای خمشی M_r و M_θ ازمعادلات تعادل‌استفاده میگردد ومنجر بمعادلات ذیل خواهد شد:

$$\frac{d}{dr}(V_r \cdot r) = -qr \tag{۷}$$

$$\frac{d}{dr}(M_r \cdot r) - M_\theta = V_r \cdot r \tag{۸}$$

اگر از معادلهٔ (۸) یکبار نسبت‌به r مشتق گرفته وازمعادلهٔ (۷) استفاده گردد نتیجه میشود که:

$$\frac{d^2}{dr^2}(M_r \cdot r) - \frac{dM_\theta}{dr} = -qr \tag{۹}$$

معادلات فوق رابطهٔ میان تلاش برنده ولنگرها وبار هموار را بدست میدهد.

رابطهٔ میان ε_r و ε_θ که انبساطهای نسبی شعاعی ومماسی میباشد، با تغییر مکان قائم چنین بیان میشود [۱ و ۳]:

$$\varepsilon_r = -Z\frac{d^2W}{dr^2} \tag{۱۰}$$

$$\varepsilon_\theta = -Z \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dW}{dr} \tag{۱۱}$$

اگر σ_r و σ_θ تنش های شعاعی ومماسی باشد برطبق قانون هوك [۳] میتوان نوشت:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) \tag{۱۲}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r) \tag{۱۳}$$

برای تعیین رابطهٔ میان $M_r - \sigma_r$ و $M_\theta - \sigma_\theta$ با مراجعه بشکلهای (۳) و (٤) و لنگر نیروهای جزئی شعاعی ومماسی dF_r و dF_θ میتوان چنین نوشت:

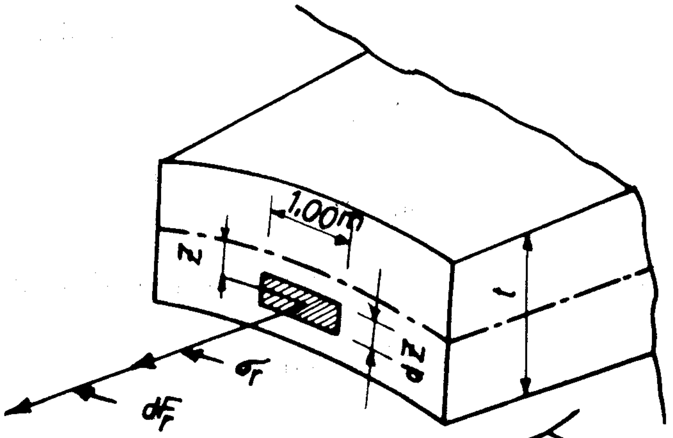
$$dF_r = \sigma_r \cdot 1m \cdot dZ \quad ; \quad M_r = \int_{-t/2}^{+t/2} Z \cdot dF_r$$

$$dF_\theta = \sigma_\theta \cdot 1m \cdot dZ \quad ; \quad M_\theta = \int_{-t/2}^{+t/2} Z \cdot dF_\theta$$

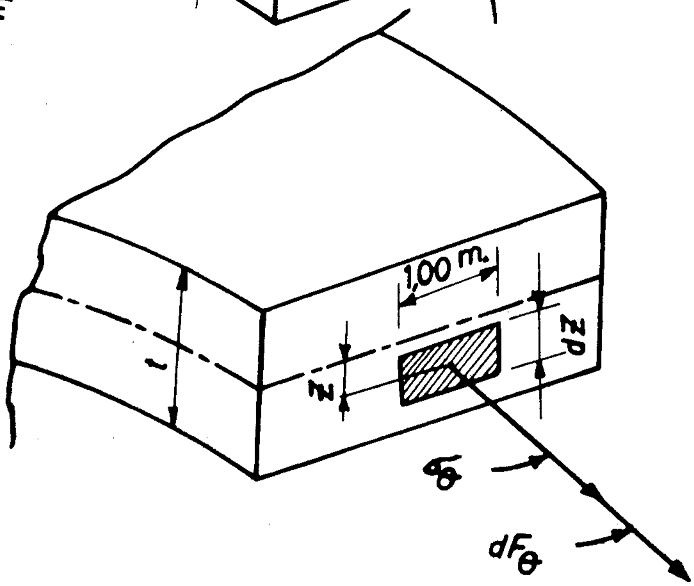
با استفاده از معادلات (۱۰-۱۳) درانتگرالهای اخیر نتیجه میگردد:

$$M_r = \frac{-Et^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{dW}{dr}\right)$$

$$M_\theta = \frac{-Et^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{r}\;\frac{dW}{dr} + \nu\frac{d^2W}{dr^2}\right)$$



شکل ۳



شکل ٤

پس از استعمال معادلهٔ (۲) درعبارات بالا نتیجه میگردد:

$$M_r = -D\left(\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\;\frac{dW}{dr}\right) \qquad (۱٤)$$

$$M_\theta = -D\left(\frac{1}{r}\;\frac{dW}{dr} + \nu\frac{d^2W}{dr^2}\right) \qquad (۱۵)$$

ایندو معادله مقدار M_r و M_θ را برحسب مشتقات تغییرشکل قائم صفحه بیان‌میکند وتلاش برندهٔ V_r نیز ازمعادلهٔ (۸) برحسب مشتقات W چنین محاسبه خواهد شد:

$$V_r = -D\left(\frac{d^3W}{dr^3} + \frac{1}{r}\;\frac{d^2W}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\;\frac{dW}{dr}\right) \qquad (۱٦)$$

تبصره ـ درمحاسبات فوق الذکر فرض شده است که ضخامت صفحه ثابت و صفحه نازك ، همگن وایزوتروپ میباشد.

٤- موارد استعمال

در زیر با ذکر مثالی چند موارد استعمال فرمولهای فوق‌الذکر را بیان میکنیم.

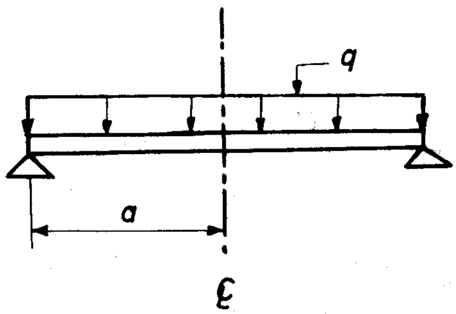
٤-١ صفحهٔ گردی که در امتداد محیط برتکیه‌گاه ساده قرار دارد - بطوریکه از معادلات بالا دیده میشود برای اینکه بتوان لنگرها - تنش‌ها و تلاش برنده را محاسبه نمود باید قبلاً ثابت های معادلهٔ(٦) را معین کرد. برای تعیین آنها از شرایط حد باید استفاده کرد که در مورد این مثال بشرح زیر بیان میگردد:

الف - بازای $r=a$ تغییر شکل $W=0$ میباشد.

ب - بازای $r=a$ لنگر شعاعی یعنی $M_r=0$ که منجر میشود باینکه:

$$M_r = W'' + \frac{\nu}{r} W' = 0 \quad r=a \quad \text{برای}$$

ایندوشرط به‌تنهائی کافی برای محاسبهٔ ثابت ها نمیباشد لذا ازشرایط پیوستگی منحنی تغییرشکل وتنش استفاده میگردد. برای‌فهم این موضوع کافی است توجه‌شود که مرکزهرصفحه نقطهٔ مخصوص(Singular Point) آن را تشکیل میدهد، بدینمعنی که در معادلهٔ (٦) و هم چنین عبارات (٤ و ٥ و ١) بازای $r=0$ مقادیر $M_r - W$ و M_0 دچار ابهام خواهد بود و برای یک امر فیزیکی چنین چیزی امکان پذیر نیست لذا شرایط Regularity راچنین‌میتوان‌نوشت:



شکل ٥

ج - بازای $r=0$ $\quad W \neq \infty$

د - بازای $r=0$ $\quad M_r$ و $M_0 \neq \infty$

آشکاراست درمواردیکه صفحهٔ مدوردارای حلقه‌ای دروسط باشد اشکالات فوق موردپیدانخواهد کرد زیرا $r=0$ نقطه‌ای ازصفحه‌را تشکیل نمیدهد.

پس از رعایت شرایط بالا نتیجه میگردد که:

$$C_2 = 0 = C_4$$

با استفاده ازشرایط (الف وب) ثابتها محاسبه شده و W بصورت زیرنوشته میگردد:

$$W=\frac{q}{64D}(a^2-r^2)\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}a^2-r^2\right) \tag{17}$$

مقدار حداکثر W درمرکز صفحه وبازای $r=0$ میباشد ومقدار آن چنین است:

$$W_{max.}=\frac{(5+\nu)}{64(1+\nu)D}qa^4 \tag{18}$$

با رعایت عبارت (۱۷) درمعادلات (۱۴ و ۱۵) M_r و M_θ چنین نوشته میگردد:

$$M_r=\frac{q}{16}(3+\nu)(a^2-r^2) \tag{19}$$

$$M_\theta=\frac{q}{16}\left[a^2(3+\nu)-r^2(1+3\nu)\right] \tag{20}$$

لنگر خمشی شعاعی‌ومماسی حداکثر درمرکز صفحه واقع میشود ومقدار آن برابراست با :

$$M_r=M_\theta=\frac{3+\nu}{16}qa^2$$

وتنش ماکزیمم ناشی از آنها عبارتست از:

$$(\sigma_r)_{max}=(\sigma_\theta)_{max}=\frac{6M_r(=M_\theta)_{max}}{t^2}=\frac{3(3+\nu)}{8t^2}qa^2 \tag{21}$$

۴-۲ صفحهٔ گردی که درطول‌محیط گیردار میباشد - با استفاده ازآنچه که درمثال پیشین ذکرشد W را بصورت زیر میتوان نوشت :

$$W=C_1+C_2r^2+\frac{qr^4}{64D} \tag{22}$$

شرایط حد را بشرح زیر میتوان بیان کرد:

الف - بازای $r=a$ زاویهٔ سطح تغییر شکل یافته درامتداد شعاع باید صفرباشد.

ب - درلبهٔ صفحه (بازای $r=a$) تغییر مکان قائم W صفحه صفر میباشد.

با استفاده ازاین شرایط مقدار C_1 و C_2 بشرح زیر خواهد بود:

$$C_1=\frac{qa^4}{64D} \qquad ; \qquad C_2=-\frac{qa^2}{32D}$$

عبارت W باگزاردن مقادیر C_1 و C_2 درمعادلهٔ (۲۲) بصورت زیر نوشته میشود:

$$W=\frac{q(a^2-r^2)^2}{64D} \tag{23}$$

حداکثر W درمرکز صفحه وبازای $r=0$ میباشد که مقدار آن چنین است:

$$W_{max}=\frac{qa^4}{64D} \tag{24}$$

عبارات M_r و M_θ بشرح زیر خواهد بود:

$$M_r = \frac{q}{16}\left[a^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)\right] \qquad (25)$$

$$M_\theta = \frac{q}{16}\left[a^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)\right] \qquad (26)$$

لنگرمنفی تکیه گاه باگزاردن $r=a$ درمعادلات بالا بدست میآید :

$$(M_r)_{r=a} = -\frac{qa^2}{8} \quad ; \quad (M_\theta)_{r=a} = -\frac{\nu qa^2}{8} \qquad \text{(۲۷ الف وب)}$$

در مرکز صفحه که $r=0$ است M_r و M_θ چنین نوشته میگردد:

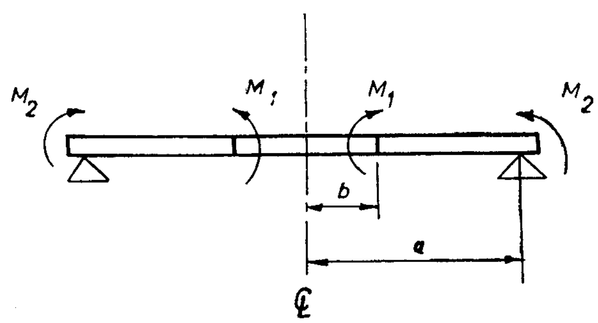
$$(M_r)_{r=0} = (M_\theta)_{r=0} = \frac{qa^2}{16}(1+\nu) \qquad (28)$$

با مقایسهٔ مقادیر (۲۷ الف) و (۲۸) دیده میشود که تنش ماکزیمم در لبهٔ صفحه واقع میگردد و مقدار آن چنین است:

$$(\sigma_r)_{max} = \frac{6M_r}{t^2} = \frac{3qa^2}{4t^2}$$

اگر درمعادلات (۱۸ و ۲۴) بجای $\nu = 0/3$ گزارده شود مقدار W_{max} درحالت اول چهار برابر تغییرمکان ماکزیمم صفحه در حالت دوم میباشد.

۴-۳ صفحهٔ گرد با سوراخی دروسط که درطول محیط برتکیه‌گاه ساده تکیه داشته ودر هردولبه تحت تأثیر لنگراست. دراین مثال فرض میشود که لنگرهای مؤثر برلبه های داخلی وخارجی صفحه بترتیب M_1 و M_2 باشد.



شکل ۶

چون دراین حال نیروی قائم خارجی وجود ندارد معادلهٔ (۱) متجانس بوده وبصورت زیرنوشته میشود:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dW}{dr}\right)\right] = 0$$

پس ازدوبار تابع اولیه گرفتن این معادله نسبت به r میتوان چنین نتیجه گرفت:

$$\frac{dW}{dr}=\frac{C_1}{2}r+\frac{C'_2}{r}$$

وبا تابع اولیه گرفتن دوباره خواهیم داشت:

$$W=\frac{C_1}{4}r^2+C_2 log_n \frac{r}{a}+C_3 \qquad (29)$$

دراین معادله سه ثابت انتگراسیون وجود دارد که برای تعیین آنها ازشرایط حد زیر استفاده میگردد:

الف - بازای $r=a$ ؛ $M_r=M_2$

ب - بازای $r=b$ ؛ $M_r=M_1$

ج - بازای $r=a$ ؛ $W=o$

پس از انجام عملیات جبری $C_1 - C_2$ و C_3 بشرح زیرین نوشته میشود:

$$C_1=\frac{2(b^2M_1-a^2M_2)}{D(1+\nu)(a^2-b^2)}$$

$$C_2=\frac{a^2b^2(M_1-M_2)}{D(1-\nu)(a^2-b^2)}$$

$$C_3=-C_1\frac{a^2}{4}=\frac{a^2(a^2M_2-b^2M_1)}{2D(1+\nu)(a^2-b^2)}$$

حالت خاص - فرض میکنیم که $M_2=o$ یعنی تکیه گاه کاملاً ساده است در اینصورت نتیجه میشود که:

$$C_1=\frac{2b^2M_1}{D(1+\nu)(a^2-b^2)}$$

$$C_2=\frac{a^2b^2M_1}{D(1-\nu)(a^2-b^2)}$$

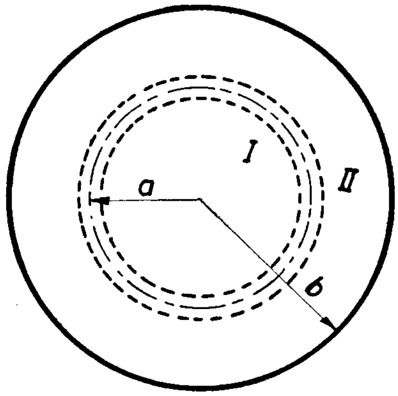
$$C_3=\frac{-a^2b^2M_1}{2D(1+\nu)(a^2-b^2)}$$

با رعایت مقادیر ضرایب درمعادلهٔ (۲۹) W بصورت زیر نوشته میگردد:

$$W=-\frac{b^2M_1}{2D(1+\nu)(a^2-b^2)}(a^2-r^2)+\frac{a^2b^2M_1}{D(1-\nu)(a^2-b^2)}log_n\frac{r}{a} \qquad (30)$$

٤-٤ صفحهٔ گردی که روی تکیه‌گاه پیوسته‌ای میان مرکزومحیط قراردارد - دراین مثال بازفرض میشود که صفحه تحت تأثیر بار هموار q وبرروی تکیه گاه پیوسته‌ای میان مرکز ولبهٔ صفحه قرار دارد. این مسئله بتفصیل ازطرف آقای پروفسور Sergev واینجانب حل گردیده که درمجلهٔ ACI* درآمریکای‌شمالی منتشر گردیده است [٤] و آنچه در زیر آورده میشود نقل از مقالهٔ مزبور میباشد. لازم بتوضیح است که طریقه‌ای که درحل معادلهٔ دیفرانسیل مسئلهٔ مزبور درمقالهٔ بالا بکار برده شده با آنچه که در اینجا ذکر

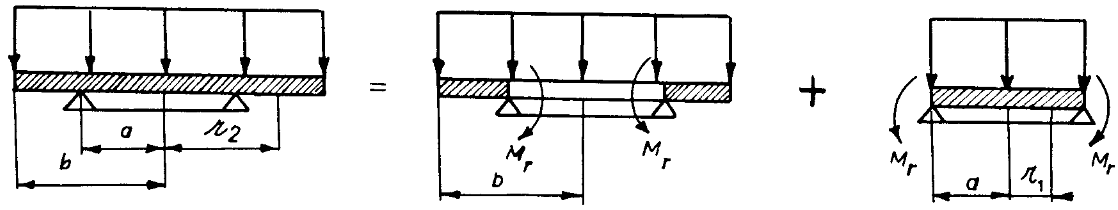
* Journal of the American Concrete Institute



شکل ۷

گردید قدری متفاوت میباشد بدینمعنی که در آنجا تابعی بنام Φ که تابع شیب نامیده گردید تعرفه شد و معادلهٔ دیفرانسیلی برحسب Φ بدست آمد که طرز حل آن نیز ذکر گردید.

برای حل این مسئله متوجه میشویم که صفحه دارای دو قسمت متمایز I و II میباشد که در (شکل ۷) نموده شده است. اگر هریک از دو قطعهٔ I و II جداگانه بررسی و تأثیر پیوستگی دوقطعه منظور گردد مسئله بسهولت قابل حل میباشد (بشکل ۸ رجوع شود).



شکل ۸

قطعهٔ I شامل مرکز دایره میباشد و همانطورکه قبلاً ذکر شد درمعادلهٔ (۶) ثابتهای C_2 و C_4 برای چنین حالتی برابر صفر است. باید دانست که $C_2=0$ نه تنها از شرط پیوستگی تنش‌ها نتیجه میگردد بلکه در حالت خمش متقارن مانند مثال فوق چون بازای $r=0$ ، $\frac{dW_I}{dr}$ برابر صفر است این شرط عیناً بهمین نتیجه منجر میگردد و W_I بصورت زیر نوشته میشود:

$$W_I = C_1 + C_2 r^2 + \frac{qr^4}{64C}$$

پس درعبارت W_I دوثابت وجود دارد که باید مقدارآنها تعیین گردد. یکی ازشرایط حد دراینحالت اینست که بازای $r_1=a$ ، $W_I=0$ میباشد؛ پس شرط دیگری لازمست که بوسیلهٔ آن بتوان C_1 و C_2 رامحاسبه کرد. درقطعهٔ I بین شعاعهای $r_1=0$ و $r_1=a$ هیچ شرط حد دیگری جزآنچه که فوقاً ذکر شد وجودندارد که بموجب آن بتوان ثابتهای انتگراسیون‌را محاسبه کرد ولی پیوستگی میان دوقسمت I و II اطلاع لازم‌را درمورد رابطهٔ دیگری میان C_1 و C_2 بدست‌میدهد. بدین منظور لازم است که عبارات $M_r - W$ و M_θ برای قطعهٔ دوم که محدود بشعاع $r_2=a$ و $r_2=b$ است نوشته شود. ازآنجائی که مرکزدایره نقطه‌ای ازقطعهٔ II را تشکیل نمیدهد، بنابراین جواب کلی W_{II} بصورت زیر خواهد بود [بمعادلهٔ (۶) رجوع شود]:

$$W_{II} = Fr^2 + G\log_n + Hr^2\log_n r + \frac{qr^2}{64D} + K$$

چنانچه دیده میشود درعبارت W_{II} چهار ثابت وجود دارد که برای تعیین آنها باید شرایط حد وپیوستگی را نوشت. این شرایط با آنچه که فوقاً گفته شد بصورت زیر خلاصه میگردد:

الف- بازای $r_1=a$ ، $W_I=0$

ب- بازای $r_2=a$ ، $W_{II}=0$

ج- بازای $r=b$ ، $V_r=0$

د- $\left(\frac{dW_I}{dr}\right)_{r_1=a}=\left(\frac{dW_{II}}{dr}\right)_{r_2=a}$

ه- $(M_r)_{r_1=a}=(M_r)_{r_2=a}$

و- $(M_r)_{r_2=b}=0$

پس از رعایت شرایط فوق و انجام عملیات جبری عبارات W_I – M_{r_1} – M_{θ_1} و W_{II} – M_{r_2} و M_{θ_2} با گزاردن:

$$\beta=\frac{b}{a}$$

بصورت زیر نوشته میشود:

(۳۱)
$$W_I=\frac{qb^4}{64D}\left\{\left[\left[8\log_n\beta+\left(2-\frac{4}{\beta^2}\right)\left(\frac{1-v}{1+v}\right)-4\right]\left(\frac{r^2}{b^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)+\frac{r^4}{b^4}-\frac{1}{\beta^4}\right]\right\}=\frac{qb^4}{64D}K_w$$

(۳۲)
$$M_{r_1}=\frac{qb^2}{16}\left[-4(1+v)\log_n\beta+(1+3v)+\frac{2(1-v)}{\beta^2}-\frac{r^2}{b^2}(3+v)\right]=\frac{qb^2}{16}K_r$$

(۳۳)
$$M_{\theta_1}=\frac{qb^2}{16}\left[-4(1+v)\log_n\beta+(1+3v)+\frac{2(1-v)}{\beta^2}-\frac{r^2}{b^2}(1+3v)\right]=\frac{qb^2}{16}K_t$$

(۳۴)
$$V_1=-\frac{qb}{2}\left(\frac{r}{b}\right)=\frac{qb}{2}K_v$$

(۳۵)
$$W_{II}=\frac{qb^4}{64D}\left\{8\left(\frac{r}{b}\right)^2\log_n\frac{b}{r}-\frac{8}{\beta^2}\log_n\left(\frac{\beta^2 r}{b}\right)+\left(\frac{r^2}{b^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)\left[\left(\frac{1-v}{1+v}\right)\left(2-\frac{4}{\beta^2}\right)+\frac{r^2}{b^2}+\frac{1}{\beta^2}+4\right]\right\}=\frac{qb^4}{64D}K_w$$

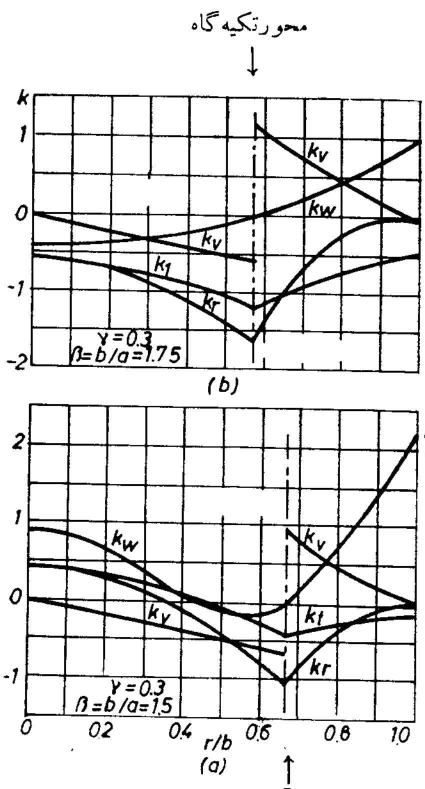
(۳۶)
$$M_{r_2}=\frac{qb^2}{16}\left[-4(1+v)\log_n\frac{b}{r}-(1-v)\left(1-\frac{2}{\beta^2}\right)-\frac{2(1-v)}{\beta^2}\,\frac{b^2}{r^2}-(3+v)\frac{r^2}{b^2}+4\right]=\frac{qb^2}{16}K_r$$

$$(۲۷) \qquad M_{\theta r} = \frac{qb^2}{16}\Big[-4(1+\nu)\log_n\frac{b}{r} - (1-\nu)\left(1-\frac{2}{\beta^2}\right) + \frac{2(1-\nu)}{\beta^2}\,\frac{b^2}{r^2} - (1+3\nu)\,\frac{r^2}{b^2} + 4\nu\Big] = \frac{qb^2}{16}K_t$$

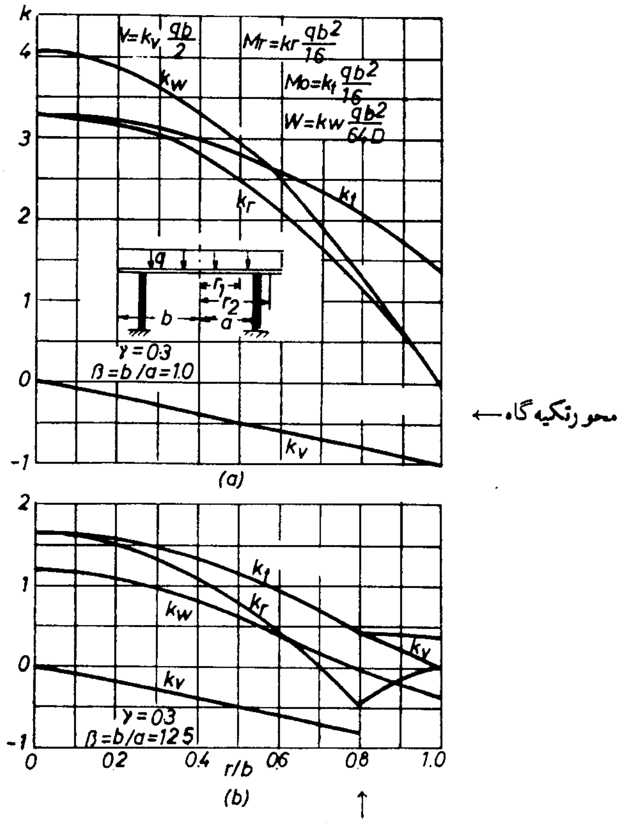
$$(۲۸) \qquad V_2 = -\frac{qb}{2}\left(\frac{r}{b} - \frac{b}{r}\right) = \frac{qb}{2}K_v$$

۵- منحنی‌های ضرایب $K_r - K_t - K_v$ و K_w

برای تسریع درطرح چنین صفحه هائی تغییرمکان قائم - تلاش برنده ولنگرهای خمشی برای‌مقادیر مختلف $\left(\beta = \frac{b}{a}\right)$ وضریب Poisson $\nu = 0,3$ محاسبه‌وترسیم گردیده‌است [۴]؛ آنچنانکه‌این مقادیرعرضهای منحنی‌ها را تشکیل میدهد وطول آنها عبارت‌از $\frac{r}{b}$ است. در این منحنی‌ها نظر آن بوده است که طولها وعرضها اعداد بی‌بعدی مانند $K_w - K_v - K_r$ و K_t باشد بطوریکه آنها را در جمله هائی که در معادلات (۳۱-۳۸) نموده شده است باید در هرموردی ضرب کرد تا اعداد فیزیکی لازم بدست آید. مقدار β از یک تا دوتغییر داده شده است.



شکل ۱۰



شکل ۹

برای اینکه نشان دهیم چطور ازمنحنی‌های (۹-۱۰) استفاده میگردد، حالت $\beta = 1,25$ را درنظر

میگیریم (شکل ۹-ب). با تخمین بارسرده وبار زندهٔ صفحه، بار وارد برواحد سطح یعنی q مشخص میگردد. با شعاع معین b میتوان حداکثر $V-M_\theta-M_r$ و W را پیدا کرد. این مقادیر چنین است:

$$M_r = M_\theta = \frac{qb^۲}{۱۶}(K_r = K_t = +۱,۶۵) \quad , \quad (\frac{r}{b} = o)$$

$$M_r = \frac{qb^۲}{۱۶}(-۰,۵) \quad , \quad (\frac{r}{b} = ۰,۸)$$

$$M_\theta = \frac{qb^۲}{۱۶}(۰,۴) \quad , \quad (\frac{r}{b} = ۰,۸)$$

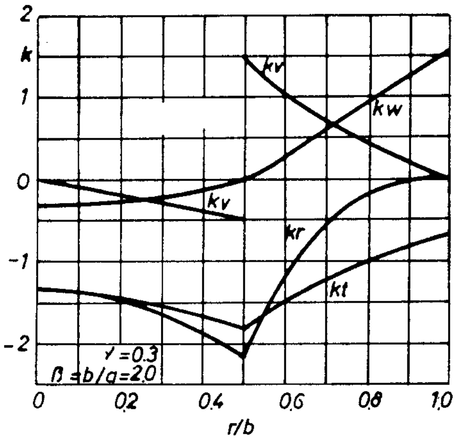
$$V = \frac{qb}{۲}(K_v = -۰,۸) \quad , \quad (\frac{r}{b} = ۰,۸)$$

$$W = \frac{qb^۴}{۶۴D}(K_w = ۱,۲) \quad , \quad (\frac{r}{b} = o)$$

برای سهولت بیشتری درانجام طرحها منحنی‌های ضرایب برحسب تغییرات β ترسیم گردیده ودرهریک ازاین منحنی‌ها مقدار $\frac{r}{b}$ ثابت گرفته شده وعددآن از صفرتا یک تغییر داده شده است (شکل ۱۲-۱۵). این ضرایب رابرای هرمقدار از β ازروی این منحنی ها میتوان بدست آورد والا مجبور میبودیم برای آنها یا ازواسطه‌یابی یا از فرمولهای دراز استفاده کنیم.

بکمک اینددسته از منحنی‌ها برای مقداری از β جز ازآنچه که درشکلهای (۹-۱۱) داده شده است میتوان منحنی‌هائی شبیه به‌منحنی‌های (۹-۱۱) رسم کرد.

محور تکیه گاه



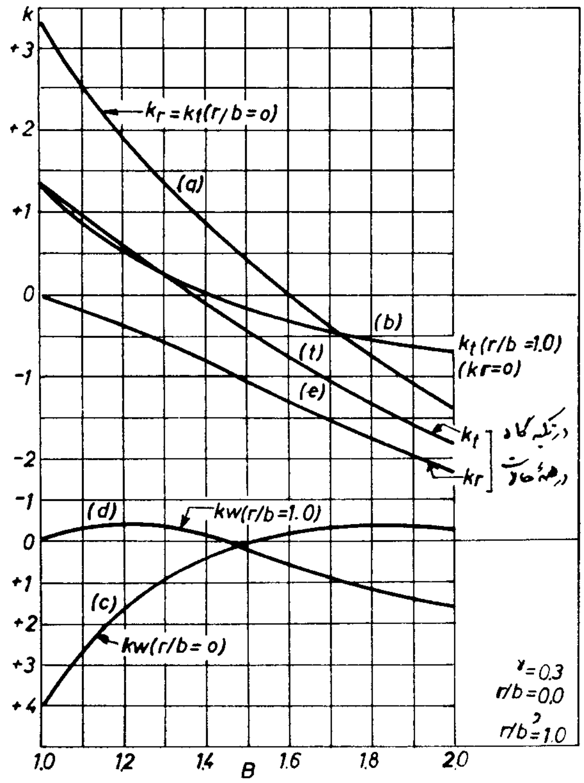
شکل ۱۱

توجه خواننده باین نکته جلب میگردد که دربعضی حالات مقیاس‌های مختلف برای عرضها بکار رفته است واین بدان ملاحظه بود که منحنی‌ها را بتوان جمع وجور کرد آنچنانکه قابل نمایش دریک شکل بوده واز حیض استفاده خارج نگردد.

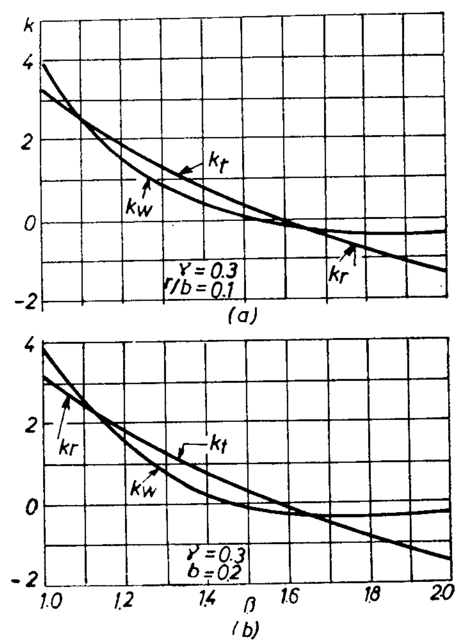
دراینمورد مخصوصاً بمقیاس K_w درشکل (۱۰- الف) دقت شود.

شکلهای (۱۲-۱۶) شاید محتاج بتوضیحاتی باشد. بعنوان‌مثال (شکل ۱۲) را درنظرمیگیریم که در آن $K_t - K_r$ و K_w در عرض برحسب تغییرات طول $\beta(=\frac{b}{a})$ وبرای‌مقادیر $\frac{r}{b} = o$ و $\frac{r}{b} = ۱$ ترسیم شده است. فرض کنیم β برابر با ۱,۷ باشد که برای آن منحنی‌هائی مانند شکلهای (۹-۱۱) رسم‌نشده است، برای‌چنین حالتی K_r و K_t در $r/b = o$ (درمرکز) برابروبمقدارآنها ۰,۴- است(منحنی a). برای $r/b = ۱$ (درمحیط) ، $K_r = o$ و $K_t = -۰,۴۵$ (منحنی b). ضریب تغییرشکل K_w برای $r/b = o$ (منحنی c) برابر

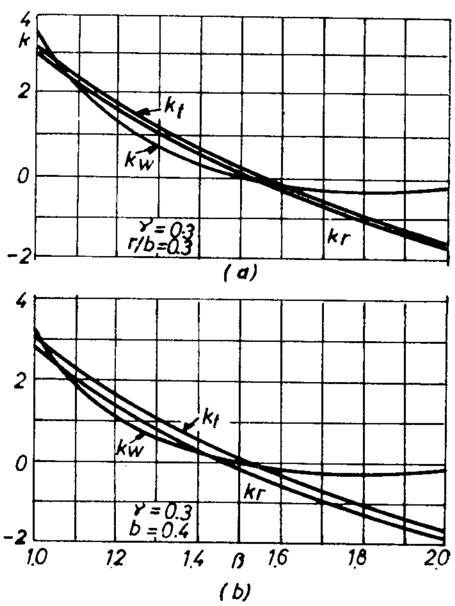
با ۰٫۳ — (جهت ازپائین ببالا) و برای r/b=۱ مقدار K_w ازمنحنی (d) برابر با ۰٫۸۰+ (جهت از فوق به‌تحت) میباشد.



شکل ۱۲

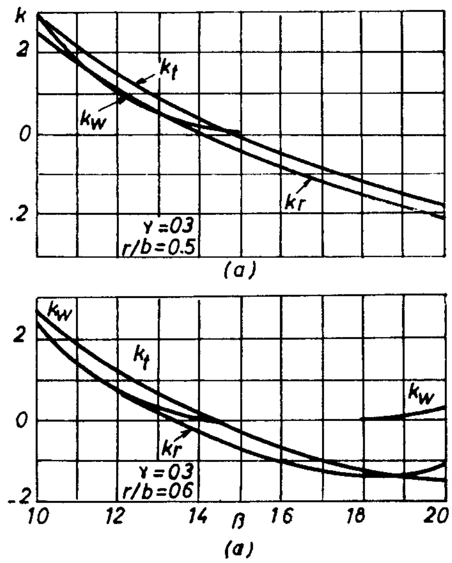


شکل ۱۳

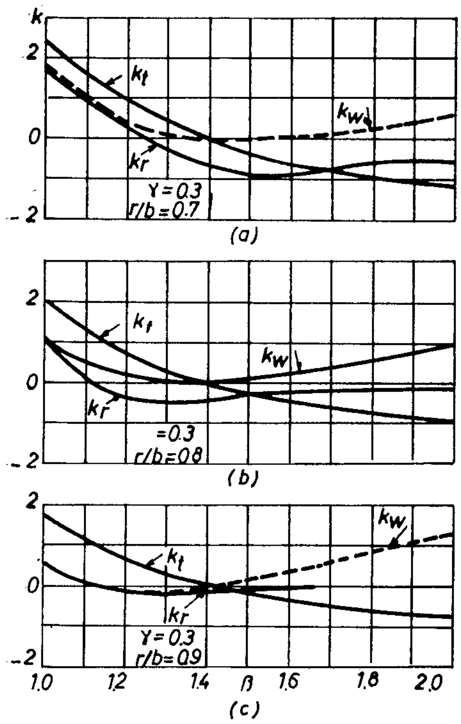


شکل ۱٤

توضیح آنکه لنگر خمشی منفی آنست که کشش در سطح بالای صفحه تولید میکند.



شکل ۱۵



شکل ۱۶

بعنوان مقایسه حالتی را درنظرمیگیریم که β = ۱٫۷۰ باشد که بازای آن $K_r - K_t$ و K_w درشکل (۱۰ b) نموده شده است. ضرایب متناظر دراینمورد بایستی نزدیک باعداد مربوط به ۱٫۷ = β باشد. بامراجعهٔ بشکل (۱۰ b) در سر کز (r/b = 0) ، $K_r = K_t =$ ۰٫۰۵ — و $K_w =$ ۰٫٤ — در حالیکه بازای r/b = ۱ ، $K_r = 0$ و $K_t =$ ۰٫۵ — و $K_w =$ ۱٫۰ + میباشد.

ازشکلهای ۹ - ۱۰ و ۱۱ استنباط میشود که حداکثر لنگرهای خمشی در مرکز صفحه و درتکیه گاه واقع میشود با مقداری لنگر خمشی مماسی در طول محیط (لبهٔ آزاد) آن - این لنگر اخیر قاطع در امر طرح نیست.

ازآنجائیکه لنگرهای خمشی M_r و M_0 درتکیه گاه ممکن است بحرانی باشد ضرایب متناظرآنها برحسب β های مختلف ترسیم ودرشکلهای (e و f) نموده شده است. منحنی های (شکل ۱۲) را ممکن بود مستقلاً برای β های مختلف که معرف موقعیت تکیه گاه میباشد ترسیم کرد آنچنانکه r/b ثابت باشد.

حال مجدداً بمورد β = ۱٫۷۰ برمیگردیم ودیده میشود که درتکیه گاه $K_r =$ ۱٫۵ — , $K_t =$ ۱٫۱ — [بمنحنی های e و f (شکل ۱۲) رجوع شود]. مقادیر مربوط به β = ۱٫۷۰ عبارتست از $K_r =$ ۱٫۶۵ — $K_t =$ ۱٫۲ — که ازشکل (۱۰ b) استخراج شده است.

درمنحنی های (a و e) (شکل ۱۲) دیده میشود که بازای β ≃ ۱٫٤۲ مقدار لنگر خمشی M_r درمرکز (r/b = 0) ودرتکیه گاه ازلحاظ عدد تقریباً برابر خواهد بود.

۶- طرز محاسبه با ذکر یک مثال عددی

برای اینکه طرز استفاده از منحنی‌ها معلوم شود بذکر یک مثال عددی میپردازیم. در این مثال ابعاد صفحه‌طوری اختیار شده است که ضرایب را بتوان مستقیماً از روی منحنی‌ها استخراج کرد یعنی β دارای مقداری باشد که بازای آن منحنی‌های ضرایب ترسیم شده است.

لنگرها وتلاش برنده بترتیب برحسب (پوند - پا) درهرپا وپوند درهرپا میباشد.

مثال عددی- فرض میکنیم $b=۲۴$ پا — $\beta=۱,۵$ یعنی $a=۱۶$ پا - بار زنده برابر با ۲۵ پوند درهرپای مربع (Psf)-بار مرده ۵۰ پوند درهر پای مربع (تخمین شده است)- $f'_c=۳۰۰۰$ پوند درهر اینچ مربع (psi) $f_s=۲۰۰۰۰$ پوند در هراینچ مربع - $m=۱۰$ باشد. پس $q=۸۰$ پوند در هرپای مربع $f_c=۱۳۵۰$ پوند درهراینچ مربع $v=۹۰$ - پوند دراینچ مربع- $R=۲۳۵,۴$ پوند درهراینچ مربع - $j=۰,۸۶۶$ — $u=۲۱۰$ پوند درهراینچ مربع (میله‌های فوقانی) و $U=۳۰۰$ پوند درهراینچ مربع میباشد (بشکل ۱۰ a رجوع شود).

ضخامت بتن

$$M_r(\text{max. در } r/b=۲/۳)=K_r\frac{qb^۲}{۱۶}=\frac{(-۱,۱)(۸۰)(۲۴)(۲۴)}{۱۶}=\frac{-(۲۳۵,۴)(۱۲)d^۲}{۱۲}$$

که از آنجا $d=۳,۶۷$ اینچ وبا رعایت ضخامت پوشش بتنی $t=۴,۵$ اینچ (بار مرده برابر با ۵۴ psf است که با مقدار تخمین شده تقریباً برابراست).

تلاش برنده

تلاش برنده در $r/b=۲/۳$ حداکثر است:

$$v=\frac{V\left(K_v=\frac{qb}{۲}\right)}{bjd}=\frac{۰,۹(۸۰)(۲۴)}{۱۲(۰,۸۶۶)(۳,۷۵)۲}=۲۲ \text{ پوندبراینچ مربع } < ۹۰ \text{ پوند براینچ مربع OK}$$

سطح مقطع فولاد خمشی

با استعمال مقدار متوسط $d=۳,۷۵$ اینچ و با ملاحظهٔ آنکه لنگر حد اکثر در $r/b=o$ واقع میشود داریم:

$$(A_s)_r=(A_s)_t=\frac{M}{f_sjd}=\frac{(K_r=۰,۴۵)(\frac{qb^۲}{۱۶}=۲۸۸۰)(۱)(۱۲)}{۲۰۰۰۰(۰,۸۶۶)(۳,۷۵)}$$

$=۰,۲۴$ اینچ مربع درهرپا (در زیر)

در $r/b=۲/۳$:

$$(A_s)_r=\frac{۰,۲۴}{۰,۴۵}(K_r=-۱,۲)=-۰,۶۴$$ اینچ مربع درهرپا (دربالا) [بطریقهٔ تناسب محاسبه شده]

در $r/b=۲/۳$:

[بطریقهٔ تناسب‌محاسبه‌شده] (دربالا) اینچ مربع درهرپا $(A_s)_t = \frac{0{,}24}{0{,}45}(K_t = -0{,}4) = -0{,}215$

در $r/b = 1{,}0$:

$(A_s)_r = 0$

[بطریقهٔ‌تناسب‌محاسبه شده] (دربالا) اینچ مربع درهرپا $(A_s)_t = \frac{0{,}24}{0{,}45}(K_t = -0{,}15) = -0{,}08$

چسبندگی ـ شرط محیطی فولاد

در $r/b = 0$

$$(\Sigma_o)_r = (\Sigma o)_t = \frac{(V=0)}{ujd} = 0$$

در $r/b = 2/3^+$

(دربالا خارج تکیه‌گاه) اینچ درهرپا $+ (\Sigma_o)_r = \dfrac{(K_v = 0{,}9)\ (\frac{qb}{2} = 960)}{210(\frac{7}{8})\ (3{,}75)} = 1{,}25$

در $r/b = 2/3^-$

(بالا داخل تکیه‌گاه) اینچ درهرپا $- (\Sigma_o)_r = \frac{1{,}25}{0{,}9}(K_v = -0{,}7)\frac{210}{300} = -0{,}68$

در $r/b = 1{,}0$:

$$(\Sigma_o)_r = (\Sigma o)_t = 0$$

تغییرشکل

درمحاسبهٔ تغییرشکل سطح ناخالص بتن را درنظر میگیریم:

پوند دراینچ مربع برای هرپا $D = \dfrac{EI}{1-v^2} = \dfrac{3(10)^6(12)(4{,}5)^3}{(1-0{,}3^2)12} = 30(10)^7$

در $r/b = 0$:

(ازفوق به‌تحت) اینچ $W = \dfrac{K_w qb^4}{64D} = \dfrac{+0{,}09(80)(24)^4(12)^3}{64(30 \times 10^7)} = +0{,}217$

در $r/b = 1$:

(ازفوق به‌تحت) اینچ $W = \dfrac{(K_w = 0{,}21)}{0{,}09}(0{,}217) = +0{,}51$

در $r/b = 0{,}566$ ، W منفی است یعنی تغییرمکان قائم ازتحت بفوق میباشد ولی مقدارآن محاسبه نشده است.

باید توجه داشت که در مرکز صفحه فولاد های شعاعی و محیطی واجد اهمیت یکسان میباشد.

فولادهای شعاعی باید درمرکز دایره سراسری باشد که غیرعملی است. فولاد محیطی $(A_s)_t$ بایستی بشکل حلقه و بمقداری که برای مرکز لازم میباشد پیش بینی گردد . این شرایط را با استعمال صفحهٔ فولادی پر ویا سوراخ‌دار میتوان تحصیل کرد اگر برروی آن فولادهای شعاعی جوش‌شده باشد. قطر این صفحه ۱۲ و ضخامت آن $\frac{1}{4}$ اینچ میتواند باشد. از آنجائیکه فاصلهٔ فولادهای شعاعی ازیکدیگر برحسب طول شعاع بطور خطی افزایش می‌یابد در حالیکه لنگر خمشی خطی تغییر نمیکند، بهتر آنست که مقدار لازم فولاد را درمقطعی جز ازآن که درآن لنگر حداکثراست مبنا قرارداده ودرسایر مقاطع کسری‌فولاد لازم را بدان‌افزود . همین طریقه را در مورد لنگر خمشی مماسی نیز میتوان بکار برد و فواصل حلقه‌های محیطی را معین کرد وفولادهای لازم خواه درسطح فوقانی خواه درسطح تحتانی قرار داد . برای‌اینکه ازچتری‌شدن صفحه‌درقسمت خارج از تکیه گاه که ناشی از تغییر مکان میباشد جلوگیری گردد ، بهتر آنست که بدین قسمت خیزواورونی (ازتحت‌بفوق) بمیزان ۰٫۱ اینچ برای بارمرده‌وزنده یا ۰٫۰۳ اینچ برای‌بارمردهٔ فقط داد . بایدخاطرنشان‌ساخت که دراین مثال اتفاقاً میزان حداکثر تغییرمکان قائم نسبتاً اندك میباشد .

بعنوان‌مثال اگر $\beta =$ ۲٫۰ — $b =$ ۲۴ پا — $a =$ ۱۲ پا وبتن‌باهمان مختصاتی‌باشد که فوقاً ذکرشد باتوجه‌بشکل ۱۱ دیده‌میشود که حداکثرM_r درتکیه گاه‌است که ضخامت‌صفحه رامشخص‌میکندونتیجه‌میشود که‌ضخامت‌صفحه‌باید ۶٫۷۵ اینچ باشد. تغییرمکان‌قائم حداکثردر $r/b =$ ۱٫۰ واقع‌میگردد ومحاسبات نشان میدهد که مقدارآن ۱٫۵ اینچ‌و جهت آن از فوق به‌تحت‌میباشد . درمرکزصفحه تغییرمکان‌قائم تقریباً ۰٫۴— اینچ یعنی ازتحت بفوق میباشد . درچنین حالتی برای اینکه نمای صفحه پس ازخیزبرداشتن بدظاهر نگردد بهترآنست که به‌لبهٔ آزاد صفحه خیزی ازپائین ببالا داد .

فهرست‌منابع

1— Timoshenko, S., and Woinowsky-Krieger, S. "Theory of Plates and Shells," New York: McGraw-Hill, 1959, P.82.

همچنین بااستفاده ازشکل تابع تنش درمختصات قطبی که درصفحهٔ ۷۵ مأخذ سوم مندرج است.

2—Girkmman, K. "Flächentragwerke Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke," Wien: Sprinper-Verlag, 1959, P. 171.

4—Timoshenko, S., and Goodier, N. "Theory of Elasticity," New York: McGraw-Hill, 1951, P. 7 and P. 57.

4— Sergev, S., and KASHANI-Sabet, M.H. "Strength and Deflection of Cicular Uniformly Loadod Slab Supported Between Center and Periphery," U.S.A.: Journal of the American Concrete Institute, Proceedings V. 60, No. 2, Feb. 1963, P. 281-293.