هندسهٔ اقلیدسی و زمان سنجی مینکوسکی(۱)

نوشتهٔ

م . ه . شفیعیها

مقدمه : از همان موقعیکه اینشتین نخستین مقالهٔ انتقادی خود را درباب اندازه‌گیری زمان منتشر ساخت وبدنبال آن تئوری نسبیت خاص را عنوان نمود ، اصطلاح « زمان‌سنجی مینکوسکی » بموازات هندسهٔ اقلیدسی که مبنای آن اندازه‌گیری فواصل در روی زمین است ، برای مطالعهٔ فضا ـ زمان(۲) بوجودآمد .

نخستین کسی که توانست قواعد هندسی متناسبی از « زمان سنجی » اینشتین استخراج نماید مینکوسکی بود . بعدها دانشمندان زیادی از قبیل J. L. Synge و P. Suppes و W. Noll و غیره کارهای او را دنبال نموده آنرا بپایهٔ تکامل فعلی رسانیدند . ازآنجائیکه بدون تردید دیر یا زود این علم نیز مانند هندسهٔ اقلیدسی شعبه‌ای از ریاضیات گردیده مورد نیاز دانش پژوهان واقع خواهدشد در اینمقاله قضایای مهم و اصول موضوعهٔ آن ذکر میشود تا خوانندگان محترم درجریان پیشرفت آن قرارگیرند . چون درضمن مقاله ممکنست باصطلاحات‌وقراردادهائی که احیاناً برای‌بعضی از خوانندگان نامأنوس باشد برخورد نمائیم‌قسمتی از آنها راکه مربوط به توپولوژی و تئوری مجموعه‌ها است ، بموقع در ذیل صفحات ذکر وبرای بقیهٔ آنها مطالعـهٔ صفحات ۲ ، ۳ ، ۱۱ ، ۵۸ ، ۹۷ ، ۱۳۱ ، ۱۸۲ ، ۱۸۸ ، ۱۸۹ از کتاب « تانسورها و هندسهٔ ریمانی(۳) را به طالبین وعلاقمندان باین مقاله توصیه مینمائیم .

قبل از پرداختن باصل موضوع ، ناگزیر شده‌ایم به‌هندسهٔ شبه ـ اقلیدسی که‌اساس ساختمانی آن « تابع فاصله »(٤) ایست که درحالت اقلیدسی به مربع‌متریک تبدیل میشودنیز اشاره‌ای کنیم . خواهیم دید که باهر فضای شبه اقلیدسی یک « فضای انتقال » منحصری که همان فضای برداری حاصلضرب داخلی(۵)

---

۱ ـ Minkowskian Chronometry   ۲ ـ Space - time

۳ ـ « تانسورها وهندسهٔ ریمانی » اثر نگارنده ـ چاپ دانشگاه تهران .

٤ ـ زیرا انتخاب« تابع فاصله » بعنوان یک‌تعریف‌اولیه در هندسهٔ اقلیدسی ، از لحاظ فیزیکی‌معقولتربنظرمیآید .

۵ ـ این اصطلاح ، اصطلاح‌دیگری برای صورتهای عادی دو خطی است (البته وقتیکه این صورتها معین و مثبت‌باشند) .

است پدید میآید. هرگاه اندیس فضای انتقال[1] صفرشود هندسهٔ شبه ـ اقلیدسی به هندسهٔ اقلیدسی بدل میگردد. و هنگامیکه این اندیس ۱ شود زمان‌سنجی مینکوسکی بوجود میآید. هنگام معرفی زمان‌سنجی با مصطلحات تازه‌ای ازقبیل، ناظر، خواندن ساعت، علائم و . . . که معانی فیزیکی مستقیمی دارند روبرو ومتوجه خواهیم شد که تشخیص آینده از گذشته به تشخیص بین انتشار و دریافت علامات بستگی پیدا میکند که در فضا ـ زمان کلاسیک چنین تشخیصی برای تعیین ترتیب زمانی بهیچوجه کافی نمیباشد.

۱ ـ تعریف ۱ ـ فرض میکنیم که v یک فضای برداری حقیقی باشد. هرصورت دوخطی قرینهٔ عادی[2] در روی v یک حاصلضرب داخلی نامیده میشود. حاصلضرب داخلی[3] $\mathbf{V} \varepsilon v$, $\mathbf{U}$ را با $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$ وحاصلضرب $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}$ را با $\mathbf{U}^2$ مینمائیم. منظور ما از «عادی» بودن اینستکه بازا جمیع مقادیر $\mathbf{V} \varepsilon v$ عبارت :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = o \qquad (1-1)$$

رابطهٔ $\mathbf{U} = \mathbf{o}$ را ایجاب مینماید. یک **صورت درجهٔ دوم**[4] در روی v، تابعی است مانند $\varphi : v \rightarrow R$ (R مجموعهٔ اعداد حقیقی) که در رابطهٔ $\varphi(\mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}$ صدق میکند. این صورت درجهٔ دوم، حاصلضرب داخلی را بطور منحصری معین میسازد.

تعریف ۲ ـ یک فضای برداری v، همراه با یک ساختمان اضافی که توسط یک ضرب داخلی تعریف شده باشد به **فضای حاصلضرب داخلی** موسوم است. اگر u معرف زیر فضائی از v باشد :

$\left\{ \mathbf{V} \mid \mathbf{V} \cdot \mathbf{U} = o \quad \forall \mathbf{u} \varepsilon u \right\}$[5] را که با $u^{\perp}$ نشان میدهیم متمم متعامد[6] زیر فضای u میخوانیم. اگر $\dim . u$[7] معین باشد خواهیم داشت : $\dim . u + \dim . u^{\perp} = \dim . v$ و $u^{\perp\perp} = u$. یک زیر فضای u وقتی **منظم**[8] است که $u \cap u^{\perp} = \left\{ \mathbf{o} \right\}$[9] و وقتی **غیر عادی**[10] است که $u \cap u^{\perp} \neq \left\{ \mathbf{o} \right\}$ باشد. اگر $\dim . u$ معین و u منظم باشد v بصورت : $v = u \dotplus u^{\perp}$[11] تجزیه خواهدشد.

تعریف ۳ ـ یک تبدیل خطی $Q : v \rightarrow v$ وقتی **متعامد** نامیده میشود که حاصلضرب داخلی راحفظ کنند. لذا طبق (۱ ـ ۱)، Q تبدیلی یک بیک یعنی یک اتومورفیسم از فضای حاصلضرب داخلی میباشد.

---

۱ ـ با آنکه محدودیتی، برای ابعاد فضاها ذکر نمیکنیم، ولی همیشه منظور ما در موارد استعمال فیزیکی زمان سنجی، فضای ٤ بعدی است.

۲ ـ Nondegenerate bilinear form

۳ـ در تمام این مقاله نماد ε بجای نماد $\in$ بکار رفته است.

٤ ـ Quadratic Form

٥ ـ میخوانیم «مجموعهٔ بردارهای $\mathbf{V}$ که برای آنها رابطهٔ $\mathbf{V} \cdot \mathbf{U} = o$ بازاء جمیع مقادیر $\mathbf{U} \varepsilon \mathbf{u}$ صادق است»

٦ ـ Orthogonal Complement

۷ ـ میخوانیم «ابعاد u».

۸ ـ Regular

۹ ـ میخوانیم « اشتراک مجموعه های U و $U^{\perp}$ مجموعهٔ صفر است» (منظور از اشتراک یا intersection دومجموعهٔ A و B مجموعه‌ایست که عناصر آن هم در A و هم در B باشد).

۱۰ ـ singular

۱۱ منظور جمع تانسوری یا جمع مستقیم دو زیر فضا است.

مصطلحات زیر را که مورد استعمال فیزیکی دارد بخاطر میسپاریم :

مجموعهٔ بردارهای :

$$v_+ = \left\{ \mathbf{V} \mid \mathbf{V}^2 > 0 \quad \text{یا} \quad \mathbf{V} = \mathbf{o} \right\}$$

$$v_- = \left\{ \mathbf{V} \mid \mathbf{V}^2 < 0 \quad \text{یا} \quad \mathbf{V} = \mathbf{o} \right\} \qquad (۱-۲)$$

$$v_0 = \left\{ \mathbf{V} \;\; \mathbf{V}^2 = 0 \right\}$$

را که فقط در بردار **o** مشترکند بترتیب **مخروط فضا**[1] و **مخروط زمان**[2] و **مخروط علامت**[3] مینامیم . هرگاه برداری مانند **V** به v_+ یا v_- یا v_0 متعلق باشد آنرا بترتیب **بردار شبه ـ فضا**[4] **شبه ـ زمان**[5] یا **بردار علامت**[6] مینامند . ماکزیمم بعد زیر فضاهای شبه ـ زمان v (زیر فضاهائی که در v_- هستند) **اندیس** v نام دارد و بصورت $i=\text{ind}.v$ (۷) نمایش داده میشود .

قضیهٔ ۱ ـ اگر u یک زیر فضای شبه ـ زمان ببعد ماکزیمم $i=\text{ind}.\,v$ و $i<\infty$ باشد متمم $u^{\perp}$ یک شبه ـ فضا بوده و خود v بصورت مستقیم زیر تجزیه میشود :

$$v = U \dotplus u^{\perp} \qquad U \subset v_- \,,\ u^{\perp} \subset v_+$$

بعلاوه بازاء هر تجزیه از این نوع داریم : $\dim.u = i$

قضیهٔ ۲ ـ اگر داشته باشیم ، $\dim.v - i \geqslant i$ ، ماکزیمم بعد زیر فضای علامت v نیز i خواهد بود .

ما اثبات این دوقضیه را دراینجا ذکر نمیکنیم و علاقمندان را بمطالعهٔ مقالهایکه **والترنول** درمجلهٔ The American Mathematical Monthly در فوریهٔ ۱۹۶۴ نوشتهاست راهنمائی وضمناً اضافهمینمائیم که L. E. Bragg ثابت کرده است که نتایج قضیهٔ ۱ وقتیکه $i=\infty$ باشد صحیح نیست.

۲ ـ **فضاهای با اندیس ۱** : از اینجا ببعدفرض میکنیم که v یک فضای حاصلضرب داخلی با اندیس ۱ باشد . دوقضیهٔ زیر که فروعی از قضایای قبل هستند قابل توجه است :

قضیهٔ ۱ ـ اگر **1** بردار واحد شبه ـ زمانی باشد ، هر بردار $\mathbf{V} \in v$ بطور منحصری بصورت زیر تجزیه میشود :

$$\mathbf{W} = \xi \mathbf{1} + \mathbf{W} \qquad \mathbf{W} . \mathbf{1} = 0 \,, \mathbf{W} \in v_+ \qquad (۲-۱)$$

قضیهٔ ۲ ـ اگر برداری بر بردار غیر صفر شبه ـ زمانی عمود باشد ، بردار شبه ـ فضاست.

---

۱ – Space – Cône ۲ – Time - Cône ۳ – Signal – Cône ٤ - Space - like

٥- Time - like ٦ – Signal - vector

۷ - تعریف معمولی اندیس v اینست : « ماکزیمم بعد زیر فضاهای علامت از فضای v » . اگر علامت ضرب داخلی را دقیقاً تعیین کنیم ، این تعریف وتعریف فوق هردو یکی خواهد شد.

در یک فضای حاصلضرب داخلی نامعین[1] $(ind.v \neq o)$ دیگر نامساوی شوارتس برقرار نبوده دو قضیهٔ مجزای زیر جانشین آن میشود :

قضیهٔ ۳ ـ (عکس نامساوی شوارتس) هرگاه $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ دو بردار شبه ـ زمان باشد نامساوی :

$$(\mathbf{U}\,.\,\mathbf{V})^{2} \geqslant \mathbf{U}^{2}\mathbf{V}^{2} \tag{۲—۲}$$

برقرار است. حالت تساوی برای هنگامی است که $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ بطور خطی تابع باشند.

قضیهٔ ٤ ـ هرگاه $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ سه بردار شبه ـ زمان غیرصفری باشد نامساوی زیر برقراراست:

$$(\mathbf{U}\,.\,\mathbf{V})\,(\mathbf{V}\,.\,\mathbf{W})(\mathbf{W}\,.\,\mathbf{U}) < o \tag{۲—۳}$$

اثبات ـ فرض میکنیم $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ هرسه مخالف $\mathbf{o}$ ومتعلق به v_- باشد. مقادیر زیر را در در نظر میگیریم :

$$\mathbf{Z}=\alpha\mathbf{U}-\beta\mathbf{V} \quad \text{و} \quad \alpha=\mathbf{V}\,.\,\mathbf{W} \quad \text{و} \quad \beta=\mathbf{U}\,.\,\mathbf{W}$$

پس داریم : $\mathbf{Z}\cdot\mathbf{W}=\alpha\beta-\beta\alpha=o$ و طبق قضیهٔ ۲ خواهیم داشت :

$$o\leqslant \mathbf{Z}^{2}=\alpha^{2}\mathbf{U}^{2}+\beta^{2}\mathbf{V}^{2}-2\alpha\beta\mathbf{U}\,.\,\mathbf{V}$$

یعنی :

$$2(\mathbf{V}.\,\mathbf{W})(\mathbf{U}\,.\,\mathbf{W})\,(\mathbf{U}\,.\,\mathbf{V}) \leqslant \alpha^{2}\mathbf{U}^{2}+\beta^{2}\mathbf{V}^{2} \tag{۲—٤}$$

در اینجا تساوی هنگامی برقرار است که $\mathbf{Z}=\mathbf{o}$ یعنی $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ بطور خطی تابع باشند. چون $\mathbf{W}$ شبه ـ زمان و مخالف $\mathbf{o}$ است قضیهٔ ۲ نشان میدهد که $\alpha=\mathbf{V.W}$ و $\beta=\mathbf{U.W}$ نمیتوانند صفرباشند. لذا طرف دوم (٤ ـ ۲) منفی وقضیهٔ ٤ ثابت میشود. اثبات قضیهٔ ۳ وقتیکه $\mathbf{U}=\mathbf{o}$ یا $\mathbf{V}=\mathbf{o}$ باشد ساده است. در غیراینصورت فرض میکنیم $\mathbf{U}=\mathbf{V}$ باشد وباتوجه به رابطهٔ (٤ ـ ۲) و $\mathbf{U}^{2}<o$ نیز قضیه اثبات میشود.

حال رابطهٔ $\mathbf{U.V}<o$ را درمجموعهٔ $\hat{v}_-$ ، یعنی در مجموعهٔ تمام بردارهای شبه ـ زمان غیرصفر درنظر میگیریم. قضیهٔ ٤ نشان میدهد که این رابطه متعدی[2] است. بدیهیست که انعکاسی[3] ومتقارن نیزهست لذا $\mathbf{U.V}<o$ یک رابطهٔ هم ارزی در $\hat{v}_-$ خواهدشد. چون بردارهای $\mathbf{U}\ \varepsilon\ \hat{v}_-$ و $-\mathbf{U}\ \varepsilon\ \hat{v}_-$ بەطبقات[4] مختلف هم‌ارزی متعلق هستند ، پس لااقل دوطبقهٔ هم‌ارزی مختلف وجود دارد. بدیهیست که بیش‌ازدو طبقه‌هم وجود ندارد. زیرا اگر $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ بەسه طبقهٔ مختلف متعلق باشند حاصلضربهای داخلی طرف‌چپ (۳ ـ ۲) همه مثبت در نتیجه نامساوی (۳ ـ ۲) صحت‌خود را از دست میدهد. اگر بردار $\mathbf{o}$ را به هردو طبقهٔ هم‌ارزی الحاق کرده مجموعهٔ نتیجه را بترتیب به v_-^1 و v_-^2 نشان دهیم دیده میشود که درواقع v_-^1 و v_-^2 مخروطهائی هستند محدب. نتایج فوق را درقضیهٔ زیر خلاصه میکنیم:

۱ـ Indefinite ۲ - Transitive ۳ – Reflexive

٤ـ Class

قضیهٔ ۵ ـ مخروط‌زمان v_- ، اجتماع [1] دو مخروط v_1 و v_2 است که فقط در بردار صفر شریکند. بردارهای شبه ـ زمان $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ وقتی بیک مخروط متعلقند که $\mathbf{U.V} \leqslant o$ باشد. هرگاه $\mathbf{U} \in v_-$ بیکی از مخروطها متعلق باشد $-\mathbf{U}$ بدیگری متعلق خواهد بود یعنی $v_2 = -v_1$

v_1 و v_2 را دومخروط ـ زمان‌جهت‌دار مینامند. اگر $\mathbf{V}$ بردارشبه ـ زمان باشد $\tau(\mathbf{V}) = \sqrt{-\mathbf{V}^2}$ را **دوام** [2] $\mathbf{V}$ نامند. تنها وقتی $\tau(\mathbf{V}) \geqslant o$ و $\tau(\mathbf{V}) = o$ است که $\mathbf{V} = \mathbf{o}$ باشد. قضیهٔ « عکس نامساوی مثلثی » زیرکه اثبات آن شبیه اثبات « نامساوی مثلثی» معمولی است نتیجه‌ای از قضایای ۳ و ٥ میباشد.

قضیهٔ ٦ (عکس نامساوی مثلثی) ـ اگر بردارهای $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ بـه یکی از دو مخروط جهت دار متعلق باشد ($\mathbf{U.V} \leqslant o$) نامساوی زیر محقق است :

$$\tau(\mathbf{U}+\mathbf{V}) \geqslant \tau(\mathbf{U}) + \tau(\mathbf{V}) \qquad (۲—٥)$$

حالت تساوی آن برای موقعی است که $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ بطور خطی تابع باشند [3].

۳ ـ **هندسهٔ شبه ـ اقلیدسی** : اگر B مجموعه‌ای از نقاط x و y و . . . و تابع :

$$d : B \times B \longrightarrow R \qquad (۳—۱)$$

که درآن R معرف خط حقیقی است داده‌شده‌باشد ، تابع d ساختمانی‌را در روی B بوجود میآورد. اتومورفیسم‌های این ساختمان همان تحویل های یک ـ بیک a از B بر روی خودش میباشند که بازاء جمیع مقادیر $x, y \in B$ در رابطهٔ زیر صدق مینمایند :

$$d(a(x)\ ,\ a(y)) = d(x\ ,\ y) \qquad (۳—۲)$$

این اتومورفیسم ها گروهی‌تشکیل میدهند که آنرا به A مینمائیم . برای d محدودیت هائی‌هم قائل‌میشویم باینمعنی‌که فرض میکنیم A شامل یک زیرگروه v که درچهار اصل زیر صدق مینماید نیز باشد :

(i_1) v مستقل از ترتیب (کوموتاتیو) باشد

(i_2) v متعدی باشد

(i_3) اگر $\mathbf{V} \in v$ نقطه‌ای‌مانند $x \in v$ را برروی خودش تحویل کند ، تحویل متحد [4] باشد.

اگرگروه عملیات در v را بطور جمعی [5] نوشته ، تحویل متحدرا با $\mathbf{o}$ و $\mathbf{V}(x)$ یعنی تصویر [6] $x \in B$ را به $x + \mathbf{V} \in B$ نشان دهیم از (i_2) و (i_3) نتیجه میشود که بازاء هردو نقطهٔ $x, y \in B$ بردار **منحصری** مانند $\mathbf{V} \in v$ چنان موجود است که x رابه y تحویل میکند. تحویل $\mathbf{V}$ که باین‌نحو تعیین شده

---

۱ ـ منظور از اجتماع (uion) دومجموعه، مجموعه‌ایست که‌عناصر آن‌لااقل بیکی‌از دو مجموعه متعلق‌باشد.

۲ ـ Duration

۳ ـ عکس نامساوی مثلثی همانچیزی است که غالباً بطوراشتباه آنرا پارادوکس ساعت درنسبیت (Relativistic Clock paradox) مینامند.

٤ ـ Identity mapping   ٥ ـ Additively   ٦ ـ Image

با $\mathbf{V} = y - x$ نموده میشود. واضح است که «مجموع» $x + \mathbf{V}$ و «اختلاف نقطهٔ»[1] $y - x$ که بدینترتیب مشخص شده‌اند تابع قراردادهای بالانیز هستند.

از تعاریف‌فوق قضیهٔ زیرکه‌ماآنرا در اینجا اثبات‌نمیکنیم پدیدمیآید: مقدار $d(x, y)$ فقط تابع «اختلاف نقطهٔ» $y - x$ است. یعنی تابعی مانند $\Phi : v \rightarrow R$ چنان موجود است که بازاء جمیع مقادیر $x, y \varepsilon B$ داریم:

$$\Phi(y - x) = d(x, y) \qquad (٣-٣)$$

بالاخره آخرین شرطی که برای v قائل میشویم شرط زیر است:

(i_4) v گروه جمعی زیربنای یک فضای برداری حقیقی و Φ یک صورت عادی درجهٔ دوم در روی v باشد. یعنی ممکنست به v ساختمان یک فضای حاصل ضرب داخلی داده شود بطوریکه داشته باشیم:

$$(y - x)^2 = (y - x) \cdot (y - x) = d(x, y) \qquad (٣-٤)$$

بموجب (i_4) اتومورفیسم های $\mathbf{V}$ در v را **بردار** میناسیم.

قضیهٔ وحدت: درگروه اتومورفیسم A، حداکثر یک زیرگروه v موجود است که در اصول (i_1) و (i_2) و (i_3) و (i_4) صدق میکند. اگر چنین زیرگروهی موجود باشد ساختمان آن (بموجب i_4) بعنوان یک فضای حاصل ضرب داخلی منحصراست[2].

تعریف: یک مجموعهٔ B همراه با ساختمانی که توسط یک تابع حقیقی d در روی $B \times B$ تعریف میشود، وقتی یک فضای‌شبه ـ اقلیدسی‌نامیده‌میشود که در اصول (i_1) و (i_2) و (i_3) و (i_4) صدق‌نماید. تابع d را تابع فاصلهٔ[3] B، و v یعنی فضای حاصلضرب داخلی آن راکه توسط B تعیین میشود **فضای انتقال** B نامند.

قضیهٔ وحدت مؤید این نکته است که فضای انتقال بنحو رسائی تعریف شده است.

اگر تابع فاصلهٔ d غیر منفی و ابعادفضای انتقال v معین[4] باشد، B ممکنست بعنوان یک‌فضای اقلیدسی بمعنای معمولی در نظرگرفته شود.

قضیهٔ تبیین[5] ـ اگرB یک‌فضای‌شبه‌اقلیدسی‌وq نقطه‌ای‌درآن‌باشدهراتومورفیسمa از B بصورت‌منحصر

$$a(x) = a(q) + Q(x - q) \qquad (٣-٥)$$

که در آن Q تبدیل‌قائمی از فضای انتقال v است بیان میشود.

اثبات: تحویل Q را با رابطهٔ زیر تعریف میکنیم:

---

١ - Point - difference

٢ - برای اثبات قضیه مطالعهٔ مقالهٔ **والترنول** (مذکور دربالا) را بعلاقمندان توصیه میکنیم.

٣ - Separation function　　٤ - Finite　　٥ - Representation theorem

$$\mathbf{Q}(\mathbf{V}) = a \circ \mathbf{V} \circ a^{-1} \qquad (۳-۶)$$

این تحویل که اتومورفیسمی از زیر گروه v از a برروی مزدوجش $v^* = a \circ v \circ a^{-1}$ در a میباشد ، ممکنست برای انتقال فضای حاصلضرب داخلی v به v^* بکاررود . در اینحال بدیهیست که v^* در شرایط (i_1) و (i_2) و (i_3) و (i_4) صدق میکند و لذا بموجب قضیهٔ وحدت باید بر v منطبق وبالمال Q اتومورفیسمی از فضای حاصلضرب v باشد . چون هنگامیکه $\mathbf{U} \varepsilon v$ است ، از قرارداد $\mathbf{U}(q) = q + \mathbf{U}$ استفاده میکنیم لذا تصویر $q \varepsilon B$ بر اثرتحویل $\mathbf{Q}\,\mathbf{V} \circ a = a \circ \mathbf{V}$ (بموجب ۵ - ۳) توسط فورمول :

$$a(q) + \mathbf{Q}\,\mathbf{V} = a(q + \mathbf{V}) \qquad (۳-۷)$$

بیان خواهد شد . که اگر دراین فورمول $\mathbf{V} = x - q$ قرارداده شود قضیه ثابت میگردد .

تبصرهٔ ۱ - فورمول (۵ - ۳) درحالت اقلیدسی ، همان فورمول تغییر مکانهای اجسام صلب است .

تبصرهٔ ۲ - قضیهٔ وحدت در این مبحث ، نشان میدهد که ساختمان کامل یک فضای شبه - اقلیدسی وفضای انتقال آن بادر دست داشتن d یعنی تابع فاصله به تنهائی مشخص میشود . ممکنست سئوال شود که باداشتن اطلاعات کمتر ، آیانمیتوان خود d رابطور منحصری تعیین نمود . Suppes نشانداده است که درصورتیکه اندیس فضای انتقال ۱ و بعد آن ٤ باشد وقتی $d(x\,,\,y) > 0$ است تابع d بازاء جمیع مقادیر $(x\,,\,y)$ بطور منحصری از روی مقدارش $d(x\,,y)$ مشخص میگردد .

تبصرهٔ ۳ - ممکنست که بخواهیم زیر فضائی مانند F از یک فضای شبه - اقلیدسی B را طوری تعیین کنیم که F و d_F یعنی تابع فاصلهٔ آن ، دراصول (i_1) و (i_2) و (i_3) و (i_4) صدق کنند وبدینترتیب به F نیز ساختمان یک فضای شبه - اقلیدسی بدهیم . دراینحال تصادفاً امکان دارد که چنین «زیر فضا»ی F ، زیر فضائی بمعنای معمولی یعنی مجموعه‌ای بصورت :

$$F = \left\{ x \;\; x = p + \mathbf{U},\ \mathbf{U} \subset \mathcal{T} \right\} \qquad (۳-۸)$$

که در آن $\mathcal{T}$ زیر فضای انتقال B است ، نباشد . مثلا فرض میکنیم $B = R \times R \times R$ با تابع فاصله‌ای مانند :

$$d(x\,,\,y) = (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2 \qquad (۳-۹)$$

باشد . مجموعهٔ F ازکلیهٔ ۳ مقداریهائی بصورت $(\xi\,,\,\varphi(\xi)\,,\,\varphi(\xi))$ که درآن φ تابعی است دلخواه : $\varphi = R \rightarrow R$ یک زیر فضا میباشد ، ولی وقتیکه φ خطی نباشد این زیر فضا از نوع (۸ - ۳) نیست .

٤ - **زمان سنجی مینکوسکی** : فرض میکنیم که مفروضات زیر داده شده باشد :

a - یک مجموعهٔ B که عناصر آن یعنی x و y و . . . وقایع [۱] نامیده میشوند .

b - یک خانوادهٔ Ω از زیرفضاهای B که B را میپوشاند و اعضای این خانواده یعنی L **ناظر**[۲] نامیده میشوند .

---

۱ - Events ۲ - Observer

c ـ بازاء هرناظر $L\varepsilon\Omega$ یک تابع فاصلهٔ غیر مثبت d_L در روی L که بآن ساختمان یک فضای یک بعدی شبه ـ اقلیدسی را میدهد.

e ـ یک رابطهٔ متقارن دوتائی (۱) $\backsim$ برروی B که دارای خاصیت زیراست :

اگر یک ناظر L و یک واقعهٔ $x \notin L$ مفروض باشد، لااقل دو واقعهٔ y_1 و y_2 در L چنان وجود دارد که به x مربوط میباشد. رابطهٔ $\backsim$ را رابطهٔ علامت (۲) ودومقداری $(x\ ,\ y)$ از وقایع راکه توسط $\backsim$ بهم مربوط میشوند علامت (۳) مینامند. (ازاین ببعد برای جلوگیری از هرگونه سوء تفاهم، علامت را بصورت «علامت» مینویسیم).

تعبیر فیزیکی ـ معنای فیزیکی $x\ \varepsilon\ L$ اینستکه L واقعهٔ x را دریافته است. فرض براینستکه هر ناظری با یک ساعت مجهز شده‌است. اگر $\tau\ L(x\ ,\ y)$ اختلاف زمان خواندن دوساعت برای وقایع x و y از L باشد فرض میکنیم که تابع فاصلهٔ $d_L(x\ ,\ y)$ از $x\ ,\ y\ \varepsilon\ L$ توسط $d_L(x\ ,\ y) = -(\tau_L(x\ ,\ y))^2$ دادهشده باشد. دو واقعه‌از یک «علامت» $(x\ ,\ y)$ را پخش (٤) ودریافت (٥) یک «علامت» نوری، «علامت» رادیوئی یا «علامت» الکترو مغناطیسی دیگری تعبیر میکنیم. اگر $x \notin L$ باشد، میتوانیم فرض کنیم که x واقعهٔ انعکاس یک «علامتی» است که توسط L در y_1 فرستاده شده ودر y_2 بسمت او برگشته است.

مفروضات a و b و c و e معرف ساختمانی برروی B است. محدودیتی که برای آن قائل میشویم اینستکه تابع فاصله‌ای مانند d در روی تمام B چنان اختیار میکنیم که بآن ساختمان یک فضای شبه اقلیدسی رابدهد ودر دو اصل زیر نیز صدق کند :

(M_1) ـ d بسطی از تابع فاصلهٔ d_L بازاء هرناظر $L\ \varepsilon\ \Omega$ باشد. بعبارت دیگر هروقت که $x\ ,\ y\ \varepsilon\ L$ باشد داشته باشیم :

$$d(x\ ,\ y) = d_L(x\ ,\ y) \tag{٤ـ۱}$$

(M_2) ـ دومقداری $(x\ ,\ y)$ فقط وقتی یک «علامت» باشد که تابع فاصلهٔ x و y صفرباشد یعنی وقتی $d(x\ ,\ y) = o$ باشد که $y \backsim x$ باشد.

قضیهٔ وحدت : حداکثر یک تابع فاصلهٔ d وجود دارد که در اصول (M_1) و (M_2) صدق مینماید.

قبل از اثبات این قضیه، چند قضیهٔ مقدماتی را با این فرض که تابع فاصله‌ای مانند d در روی B (که در (M_1) و (M_2) صدق مینماید) داده شده باشد اثبات میکنیم. فضای انتقال مربوطه را مانند قسمت قبل، با v نشان میدهیم.

قضیهٔ ۱ ـ هر ناظر B خط مستقیم شبه ـ زمانی (٦) در B است. بعبارت دقیقتر برداری مانند $1\ \varepsilon\ v$ چنان وجود دارد که :

۱ـ Binary relation
۲ـ Signal relation
۳ـ Signal
٤ـ Emission
٥ـ Reception
٦ـ Time – like straight line

(۱) ـ $\mathbf{1}$ برداریکهٔ شبه ـ زمان یعنی $\mathbf{1}^2=-1$ است.

(۲) اگر $q \in L$ مفروض باشد، تنها وقتی $x \in L$ است که $x=q+\xi\mathbf{1}$ و $\xi \in R$ باشد.

برداری مانند $\mathbf{1}$ که این دوخاصیت را داشته باشد **بردار امتداد**[1] ناظر L نامیده میشود. بدیهیست که اگر $\mathbf{1}$ یک بردار امتداد باشد، $\mathbf{-1}$ نیز یک بردار امتداد بوده بردار امتداد دیگری وجود ندارد.

اثبات ـ فرض میکنیم که v' فضای یک‌بعدی انتقال مربوط به d_L باشد. تفاوت ـ واقعهٔ[2] دوواقعهٔ $x , y \in L$ را در v' با $y \dot{-} x$ نشان میدهیم. این تفاوت از تفاوت واقعهٔ $y-x$ در v که مربوط به تابع فاصلهٔ d است دقیقاً باید جدا شود. از اصل (M_1) ورابطهٔ (۳ ـ ۳) نتیجه میشود که بازاء جمیع مقادیر $x , y \in L$ داریم:

$$(y-x)^2=(y \dot{-} x)^2=d(x , y)=d_L(x , y) \qquad (۴-۲)$$

چون v' یک بعدی و d_L غیر مثبت فرض شده، L را میتوانیم بصورت زیر که در آن q واقعه‌ای ثابت در L بوده و $\mathbf{1}' \in v'$ بنحویست که $\mathbf{1}'^2=-1$ میباشد نشان دهیم:

$$L : \left\{x \mid x=q+\xi\mathbf{1}' \;,\; \xi \in R\right\}$$

حال اگر تحویلی مانند $\mathbf{f}$ از R درون v را با $\mathbf{f}(\xi)=(q+\xi\mathbf{1}')-q$ تعریف کنیم L، مجموعهٔ حوادثی مانند x میشود که بصورت:

$$x=q+\xi\mathbf{1}'=q+\mathbf{f}(\xi) \qquad \xi \in R \qquad (۴-۳)$$

نشانداده میشود. با استدلالی که بیرون از ظرفیت این مقاله است ثابت میشود که بازاء جمیع مقادیر $\xi , \eta \in R$ باید داشته باشیم:

$$-\xi\eta=\mathbf{f}(\xi) . \mathbf{f}(\eta) \qquad (۴-۴)$$

اگر ξ و η را ثابت فرض کرده و برداری مانند $\mathbf{S} \in v$ را توسط رابطهٔ:

$$\mathbf{S}=\eta\mathbf{f}(\xi)-\xi\mathbf{f}(\eta) \qquad (۴-۵)$$

نمایش دهیم از (۴ ـ ۴) نتیجه میشود:

$$\mathbf{S}^2=\eta^2(-\xi^2)-2\xi\eta(-\xi\eta)+\xi^2(-\eta^2)=0$$

یعنی $\mathbf{S}$ یک بردار «علامت» است. اکنون واقعهٔ $z=q+\mathbf{S}$ را درنظر میگیریم. بموجب (۲ ـ ۴) داریم:

$$\mathbf{S}^2=(z-q)^2=d(q , z)=0 \qquad (۴-۶)$$

1 - Direction Vector

2 - Event - difference

اگر $z \varepsilon L$ باشد ، $\mathbf{S}=z-q$ باید بصورت $\mathbf{S}=\mathbf{f}(\zeta)$ باشد. پس طبق (٤ - ٤) $o=\mathbf{S}^2=-\zeta^2$ بوده بنابراین $\mathbf{S}=\mathbf{f}(o)=\mathbf{o}$ میشود.

حال فرض میکنیم $\mathbf{S} \neq \mathbf{o}$ یعنی $z \notin L$ باشد. بموجب اصل (M_2) و رابطهٔ (٦ - ٤) ، $q \varepsilon L$ و $z \notin L$ باید توسط یک «علامت» باهم مربوط باشند. اما رابطهٔ «علامت» این خاصیت را دارد که واقعهٔ دیگری هم مانند $p \varepsilon L$ $(p \neq q)$ که به z مربوط است وجود داشته باشد. باز ، با توجه به (M_2) رابطهٔ زیر را که در آن $\mathbf{V}=q-p$ است خواهیم داشت :

$$o=d(p\,,z)=(\mathbf{S}+\mathbf{V})^2=2\mathbf{S}\,.\,\mathbf{V}+\mathbf{V}^2 \qquad (٤-٧)$$

چون $p \varepsilon L$ است $\mathbf{V}$ باید بصورت $\mathbf{V}=\mathbf{f}(\lambda)$ باشد. لذا بموجب (٤ - ٤) و (٥ - ٤) داریم :

$$\mathbf{S}\,.\,\mathbf{V}=\eta(-\xi\lambda)-\xi(-\eta\lambda)=o$$

و از آنجا طبق (٧ - ٤) داریم : $o=\mathbf{V}^2=-\lambda^2$ ودرنتیجه $\mathbf{V}=\mathbf{f}(o)=\mathbf{o}=q-p$ یعنی $q=p$ میشود درحالیکه فرض کرده بودیم $p\neq q$ است.

پس از اینجا معلوم میشود که همیشه $\mathbf{S}=\mathbf{o}$ بوده وطبق رابطهٔ (٥ - ٤) ، بازاء جمیع مقادیر حقیقی ξ و η خواهیم داشت :

$$\eta\mathbf{f}(\xi)=\xi\,\mathbf{f}(\eta) \qquad (٤-٨)$$

اگر η را مساوی ١ و $\mathbf{f}(1)$ را مساوی $\mathbf{1}\,\varepsilon\, v$ بگیریم می‌بینیم که رابطهٔ (٨ - ٤) بصورت $\mathbf{f}(\xi)=\xi\mathbf{1}$ درمیآید. پس مطابق (٣ - ٤)، L باید مجموعهٔ وقایعی بصورت $x=q+\xi\mathbf{1}$ باشد. رابطهٔ $\mathbf{1}^2=-1$ نتیجه‌ای از (٤-٤) میشود ولذا $\mathbf{1}$ دارای خواص (١) و (٢) بوده حکم ثابت میگردد.

قضیهٔ ٢ - اگر L ناظری بابردار استداد $\mathbf{1}$ و $q \varepsilon L$ و $x \varepsilon B$ باشد شرط لازم و کافی برای اینکه یک واقعهٔ $y=q+\eta\mathbf{1}\,\varepsilon\, L$ توسط یک «علامت» به x مربوط باشد اینستکه η یک ریشهٔ معادلهٔ زیر باشد:

$$\eta^2+\mathbf{1}\,.\,(x-q)\,\eta-(x-q)^2=o \qquad (٤-٩)$$

اگر $x \notin L$ باشد ، درست دو واقعهٔ

$$y_1=q+\eta_1\mathbf{1} \quad , \quad y_2=q+\eta_2\mathbf{1} \qquad (٤-١٠)$$

در L وجود دارد که بایک «علامت» به x مربوط میشود وداریم :

$$d(q\,,x)=(x-q)^2=-\eta_1\eta_2 \quad , \quad (x-q)\,.\,\mathbf{1}=-(\eta_1+\eta_2) \qquad (٤-١١)$$

و :

$$[\mathbf{1}.(x-q)]^2+4(x-q)^2>o \qquad (٤-١٢)$$

اثبات ـ طبق (M_2) تنها وقتی $y=q+\eta\mathbf{l}$ توسط یک « علامت » به x مربوط میشود که داشته باشیم :

$$d(x, y)=(y-x)^2=(q-x+\eta\mathbf{l})^2=-\eta^2-\mathbf{l}.(x-q)\eta+(x-q)^2=0$$

یعنی قسمت اول قضیه ثابت است.

اگر $x \varepsilon L$ باشد، خاصیت رابطهٔ «علامت» که در (e) ذکر کردیم ایجاب میکند که (۴ ـ ۱۰) ریشه‌های متمایز و حقیقی داشته باشد. (۴ ـ ۱۲) شرط لازم و کافی برای این وجوب بوده و ریشه‌های (۴ ـ ۹) همیشه در (۴ ـ ۱۱) صدق میکنند.

حال پس از اینمقدمات به اثبات قضیهٔ وحدت میپردازیم :

اثبات قضیهٔ وحدت : اگر x , q دو واقعه‌ای غیر مشخص در B باشند چون خانوادهٔ ناظرها B را میپوشاند ، لااقل یک ناظر وجود دارد که $q \varepsilon L$ باشد. اگر x هم در L باشد بموجب (M_1) داریم:

$$d(q , x)=d_L(q , x) \tag{۴–۱۳}$$

اگر $x \not\varepsilon L$ باشد، حوادث $y_1 , y_2 \varepsilon L$ را که مانند قضیهٔ(۲) تعیین کردیم درنظرمیگیریم. با همان قرارداد قضیهٔ (۲) داریم :

$$d(q , y_i)=(y_i-q)^2=\eta_i^2\,\mathbf{l}^2=-\eta_i^2 \qquad i=1 , 2$$

$$d(y_1 , y_2)=(y_2-y_1)^2=(\eta_2-\eta_1)^2\,\mathbf{l}^2=-\eta_2^2+2\eta_1\eta_2-\eta_1^2$$

از آنجا نتیجه میشود :

$$\eta_1\eta_2=\frac{1}{2}\Big[d(y_1 , y_2)-(q , y_1)-d(q , y_2)\Big]$$

اما باتوجه به $y_1,y_2,q \varepsilon L$ ، از (M_1) و رابطهٔ اول (۵ ـ ۱۱) نتیجه میشود:

$$d(q , x)=-\frac{1}{2}\Big[d_L(y_1 , y_2)-d_L(q , y_1)-d_L(q , y_2)\Big] \tag{۴–۱۴}$$

معادلات (۴ ـ ۱۳) و (۴ ـ ۱۴) نشان میدهد که وقتی d_L داده شده باشد ، $d(q , x)$ منحصراً تعیین وقضیه ثابت میگردد.

تعریف : اگر مجموعه‌ای مانند B دارای یک رابطهٔ دوتائی متقارن $\backsim$ (مذکور در a تا e) ویک ساختمانی که با Ω , $\Big\{d_L \quad L \varepsilon \Omega\Big\}$ تعریف شده است ، باشد آن را عرصهٔ **مینکوسکی**[1] نامند.

قضیهٔ وحدت نشان میدهد که عرصهٔ مینکوسکی هم بنحوی کانونیک دارای ساختمان یک فضای شبه ـ اقلیدسی است.

قضیهٔ ۳ ـ اندیس فضای انتقال v از عرصهٔ مینکوسکی برابر ۱ است.

۱ – Minkowskian domain

اثبات : فرض میکنیم L ناظری بابردار امتداد $\mathbf{1}$ و $U=\left\{\mathbf{U} \mid \mathbf{U}=\xi\mathbf{1}\ ,\ \xi \varepsilon R\right\}$ زیر فضائی یک بعدی از v که توسط $\mathbf{1}$ ایجادشده‌است‌باشد. بردارغیرصفری مانند $\mathbf{V} \varepsilon \mathbf{U}^{\perp}$ که در $\mathbf{1}\ .\ \mathbf{V}=o$ صدق‌مینماید درنظر میگیریم. واقعه‌ای‌مانند $q \varepsilon L$ انتخاب و فرض‌میکنیم‌که $x=q+\mathbf{V}$ باشد. روشن است‌که‌داریم : $x \notin L$. ازطرفی‌چون‌داریم : $\mathbf{1.V}=\mathbf{1}.(x-q)=o$ پس‌بموجب (۲ ـ ۱ ـ ٤) رابطهٔ $(x-q)^{2}=\mathbf{V}^{2}>0$ برقرار یعنی $\mathbf{V}$ یک‌شبه ـ فضاست واز آنجا نتیجه‌میشودکه : $v=U\dot{+}U^{\perp}$ تجزیهٔ مستقیمی از v باخاصیت $U \subset v_{-}$ و $U^{\perp} \subset v_{+}$ یعنی‌تجزیه‌ای ازنوع (۳ ـ ۱)میباشد. قضیهٔ ۱ از (§۱) نیزتساوی $\text{ind.}v=\dim.u=1$ را تأیید مینماید.

تبصره ـ بطوریکه‌در قضیهٔ ۱ نشان‌دادیم ، خانوادهٔ ناظرین Ω ، یک کنگروانس از خطوط‌مستقیم در B هستند وچون B را میپوشانند پس باید لااقل از هرواقعه یک خط بگذرد. مثلاً Ω بتواند مجموعهٔ تمام خطوطی موازی با امتداد شبه ـ زمان مفروضی باشد. جزدرمواقعیکه Ω شامل ناظرین «بسیار زیاد»ی است یک شناسائی از $d(x\ ,\ y)$ ، بازاء جمیع دو مقداریهای $(x\ ,\ y)$ و $x\ ,\ y\ \varepsilon\ L$ ، به تنهائی کافی برای تعیین d نیست. درواقع این ارتباطداخلی [1] d با رابطهٔ «علامت» است(که توسط اصل (M_2) فراهم‌آمده) که d را منحصر میسازد.

۵ ـ ترتیب زمانی ـ مانند مبحث قبل فرض میکنیم‌که مفروضات (a) , (b) , (c) داده شده باشد ولی بجای فرض (e) فرض $(\acute{e})$ نهاده شده باشد:

$(\acute{e})$ — یک رابطهٔ دوتائی $\rightharpoondown$ برروی B که خاصیت زیر را دارد : اگر یک ناظر L ویک واقعهٔ $x \varepsilon B$ مفروض باشد واقعه‌ای مانند $y_1 \varepsilon L$ که $y_1 \longrightarrow x$ است و واقعه‌ای مانند $y_2 \varepsilon L$ که $x \longrightarrow y_2$ است ، موجود باشد. بعلاوه روابط $x \longrightarrow y$, $y \longrightarrow x$ وقتی صحیح است‌که $x=y$ باشد. رابطهٔ $\rightharpoondown$ را رابطهٔ«علامت»جهت‌دار[2] ورابطه‌ای راکه با $x \backsim y$(فقط وقتیکه $x \longrightarrow y$ یا $y \longrightarrow x$ است) تعریف میشود رابطهٔ«علامت»(غیرجهت‌دار) وابسته به $\rightharpoondown$ مینامند. بدیهیست $\backsim$ واجد همان خاصیت مذکوراصل (e) ازمبحث‌قبل میباشد.

تعبیر فیزیکی ـ منظوراز تغییر (e) به(e') ، دخالت‌دادن‌امکان‌تشخیص‌انتشار [3] x ازدریافت[4] y از یک «علامت» $x \longrightarrow y$ است.

دراینجا احتیاج داریم‌که تابع فاصلهٔ d در روی B ، گذشته ازآنکه‌در اصول (M_1) و (M_2) صدق میکند در اصل زیر نیز صدق نماید :

(M_3) — اگر L یک ناظرو y_1 ، y_2 و $z_1\ ,\ z_2$ وقایعی در L چنان باشندکه بازاء مقادیری مانند $p\ ,\ q\ \varepsilon\ B$ داشته باشیم :

---

۱ - Interconnection

۲ - Directed signal relation

۳ - Emission

٤ - Reception

$$y_1 \longrightarrow p \longrightarrow y_2 \quad \text{و} \quad z_1 \longrightarrow q \longrightarrow z_2 \tag{۵—۱}$$

لذا نامساوی زیر برقرار باشد :

$$d_L(y_1 , z_1) + d_L(y_2 , z_2) - d_L(y_1 , z_2) - d_L(y_2 , z_1) \leqslant 0 \tag{۵—۲}$$

تعریف ـ مجموعه‌ای مانند B همراه با ساختمانی که توسط Ω ، $\left\{d_L \mid L \,\varepsilon\, \Omega\right\}$ ورابطهٔ $\longrightarrow$ مذکور در (a) , (b) , (c) , (e') تعریف شده اگر در اصول (M_1) , (M_2) , (M_3) نیز صدق نماید عرصهٔ مینکوسکی[1] نامیده میشود.

از حالا ببعد حالت پیش پا افتاده‌ای را که عرصهٔ B بریکی از ناظرین منطبق میباشد کنار میگذاریم. لذا بعد فضای انتقال v لااقل ۲ خواهد بود.

تعریف : واقعهٔ $x \,\varepsilon\, B$ را وقتی جلوتر (زودتر) از واقعهٔ $y \,\varepsilon\, B$ مینامیم وبا $x<y$ نشان میدهیم که واقعه‌ای مانند p چنان موجود باشد که داشته باشیم : $x \longrightarrow p \longrightarrow y$

قضیهٔ ۱ ـ هرناظر L یک بردار امتداد منحصر $\mathbf{l}$ دارد که خاصیت زیر را داراست : بازاء هردو واقعهٔ $x , y \,\varepsilon\, B$ ، رابطهٔ $x<y$ هنگامی صادق است که داشته باشیم :

$$\begin{cases} (y-x)^2 \leqslant 0 \\ (y-x).\mathbf{l} \leqslant 0 \end{cases} \tag{۵—۳}$$

آن بردار امتداد $\mathbf{l}$ که با شرایط (۳ ـ ۵) مشخص میشود **بردار امتداد خاص** L نام دارد.

(ما این قضیه را دراینجا ثابت نمیکنیم و قرائت مقالهٔ نول را به علاقمندان توصیه مینمائیم).

تبصره : عدد $\frac{1}{2}\,\mathbf{l}.(y-x)$ — «اختلاف ـ زمان»[2] وقایع y , x نسبت بناظر L میباشد. لذا قضیهٔ فوق میگوید که x وقتی جلوتر (زودتر) از y است که از هر ناظر دیگر «جلوتر» باشد.

لم ـ اگر L ناظری بابردار امتداد $\mathbf{l}$ و $x_1 , x_2 \,\varepsilon\, B$ باشد فرض میکنیم $q \,\varepsilon\, L$ و $z_i = q + \xi_i .\mathbf{l}$ $(i = 1 , 2)$ دو واقعهٔ وابسته به x_i توسط یک «علامت» باشند. ثابت کنید :

$$(x_2 - x_1).\mathbf{l} = \xi_1 - \xi_2 \quad \text{و} \quad \xi_1 \xi_2 (x_2 - x_1)^2 \geqslant 0 \tag{۵—۴}$$

که نامساوی وقتی به مساوی بدل میشود که $(x_2 - x_1)^2 = 0$ باشد.

اثبات : اگر درقضیهٔ ۲ قسمت ٤ ، بجای $q , x , y_1 , y_2 , \eta_1 , \eta_2$ بترتیب مقادیر $q , x_i , q , z_i , 0 , \xi_i$ بگذاریم رابطهٔ دوم (۱۱ ـ ٤) بصورت :

$$\mathbf{S}_i . \mathbf{l} = -\xi_i \tag{۵—۵}$$

که در آن $\mathbf{S}_i = x_i - q$ است درمیآید. بنابراین داریم :

$$(x_2 - x_1) . \mathbf{l} = (\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1) \cdot \mathbf{l} = -(\xi_1 - \xi_1)$$

یعنی اولین فورمول (٤ ـ ۵) ثابت است.

۳- Minkowskian domain ۲- Time - difference

حال بردار $\mathbf{U}=\xi_2\mathbf{S}_1-\xi_1\mathbf{S}_2$ رادرنظر میگیریم. از (۵ - ۵) نتیجه میشود که $\mathbf{U}.\mathbf{1}=0$ ولذاطبق قضیهٔ ۳ ازقسمت ٤ وقضیهٔ ۲ از قسمت ۳ ، $\mathbf{U}$ باید یک شبه - فضا باشد. اما چون $\mathbf{S}_i^2=0$ است لذاداریم

$$\mathbf{U}^2=-2\xi_1\xi_2\mathbf{S}_1\,.\,\mathbf{S}_2\geqslant 0 \qquad (۵-۶)$$

ازطرفی‌داریم $(x_2-x_1)^2=(\mathbf{S}_2-\mathbf{S}_1)^2=-2\mathbf{S}_1\,.\,\mathbf{S}_2$ یعنی (۶ - ۵) معادل‌دومین‌فورمول (٤ - ۵)است. در (۶ - ۵) حالت‌تساوی وقتی بر قرار است که $\mathbf{U}=\xi_2\mathbf{S}_1-\xi_1\mathbf{S}_2=\mathbf{0}$ یعنی باید $x_2-x_1=\mathbf{S}_2-\mathbf{S}_1$ یک بردار علامت باشد و حکم ثابت میشود.

بالاخره آخرین مطلبی‌که بنظر ما لازم است بآن اشاره کنیم تبصرهٔ زیر است :

تبصره - یکی‌از دو مخروط زمان مذکوردر (§۲) مثلاً $\underline{v}_1$ توسط این‌خاصیت که $y-x\in\underline{v}_1$ رابطهٔ $x<y$ را ایجاب مینماید ، از دیگری جدامیشود. لذا میتوانیم $\underline{v}_1$ رابعنوان‌مخروط‌زمان آینده و $\underline{v}_2=-\underline{v}_1$ را بعنوان مخروط زمان گذشته در نظر بگیریم.

پایان