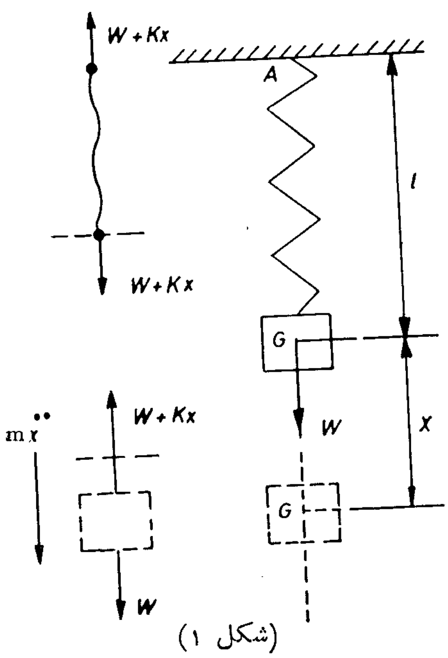
مطالعهٔ پلهای معلق از نظر استاتیک، دینامیک و آئرودینامیک

نوشتهٔ
دکتر مهندس محمدحسین کاشانی ثابت
معلم دانشکدهٔ فنی و رئیس مؤسسهٔ مهندسی راه و ساختمان دانشکدهٔ صنعتی

قسمت دوم - کلیاتی چند راجع بار تعاشات

قسمت اول این مقاله که راجع باثر نیروی استاتیک در پلهای معلق است درشمارهٔ قبل ذکر شد اینک برای درک اصطلاحات مربوط بارتعاشات بطور اعم و فهم محاسبات دینامیک پلهای معلق بطوراخص لازم است که ذیلاً مختصری راجع بانواع ارتعاشات بحث گردد.

۱ - ارتعاشات هارمونیک آزاد (Free Harmonic Vibrations) - اگر یک جسم ارتجاعی، مانند یک تیر بار شده، یک میلهٔ پیچش داده شده یا یک فنر تغییر شکل داده شده بوسیلهٔ ضربه یا باستعمال واز بین بردن یک بار بطور ناگهانی از وضع تعادل خود خارج گردد، نیروهای ارتجاعی آن عنصر در وضع تغییرمکان یافته دیگربا بارهای وارد برآن درحال تعادل نخواهد بود و ارتعاشات در آن رخ خواهد داد. بطور کلی یک جسم ارتجاعی ارتعاشاتی از نوع های مختلف میتواند داشته باشد. مثلاً یک سیم یا یک تیر درحال ارتعاش خود ممکن است شکلهای مختلفی بگیرد یعنی ممکن است نقاطی از این عنصر در حین ارتعاش بی حرکت بماند. این نقاط را گره* نامند. درساده ترین حالات که وضع یک دستگاه مرتعش شونده میتواند با یک بعد فقط مشخص شود آنرا دستگاه با یک درجهٔ آزادی مینامند. اکنون حالتی را که در (شکل ۱)



(شکل ۱)

* گره = node

نشان داده شده است در نظر میگیریم . این دستگاه از یک فنر که سر آن ثابت و انتهای آن بوزنهٔ w متصل میباشد تشکیل شده است. اگر وضع فنر طوری باشد که فقط تغییر مکان قائم بار w امکان پذیر بوده و وزن آن درمقابل وزنهٔ w نا چیز باشد چنین دستگاهی با یکدرجهٔ آزادی درنظرگرفته خواهد شد . وضع آن دراینصورت با تغییرمکان قائم وزنهٔ w مشخص خواهد گردید .

بکمک یک ضربه ویا بکمک وارد ورها کردن یک بارخارجی ارتعاش دراینجسم میتواند تولیدشود . ارتعاشی که فقط بوسیلهٔ نیروی ارتجاعی‌فنر نگهداری میشود موسوم است بارتعاش آزاد یا ارتعاش طبیعی (از اصطکاك فنرو وزنه با هوا صرفنظر میشود) .

عبارت جبری چنین حرکتی را بکمک حل یک معادلهٔ دیفرانسیل حرکت * میتوان یافت مشروط برآنکه نیروهای وارد بردستگاه معین ومعلوم باشد . اگر k عبارت از باری باشد که واحد کشش را در فنر تولید کند چنین‌مقدار را ثابت فنر ** نامند. هرگاه بار برحسب kg وکشش برحسب cm اندازه‌گیری‌شود دراینصورت k برحسب کیلوگرم بر cm بیان میشود. تغییرمکان قائم فنر براثر نیروی استاتیکی یعنی وزن Wعبارت خواهد بود از :

$$\delta_{st} = \frac{W}{k}$$

اگر تغییرمکان قائم بارمرتعشW از وضع تعادل آن x وآنرا مثبت بنامیم اگر درامتداد پائین باشد ، عبارت نیروی کششی که برفنر وارد است در هرموقعیت بار W بشرح زیر خواهد بود:

$$F = W + kx \qquad \text{(a)}$$

برای نوشتن معادلهٔ دیفرانسیل حرکت اصل نیوتون را بکارخواهیم برد . این اصل بیان میکند که حاصلضرب جرم یک قطعه درشتاب آن مساویست با نیروهائیکه در امتداد شتاب برآن اثر میکند***. دراین مثال جرم جسم مرتعش $\frac{W}{g}$ (از وزن فنر صرفنظرشده است) که درآن g عبارت از شتاب ثقل میباشد. شتاب جسم بوسیلهٔ مشتق ثانی تغییرمکان X برحسب زمان که به $\ddot{X}$ نموده میشود بیان میگردد. نیروهای وارد برجسم عبارتست از وزن W که درجهت از بالا بپائین اثر میکند ونیروی F فنر (معادلهٔ a) که برای موقعیت وزنه آنچنانکه در (شکل ۱) نموده شده است بسمت بالا عمل میکند . بنابراین معادلهٔ فاصلهٔ حرکت دراین حالت چنین نوشته میشود:

$$\frac{W}{g}\ddot{X} = W - (W + kX) = -kX \qquad \text{(b)}$$

* Differential Equation of Motion

** Spring Constant

*** بیان بالا بمبنای آنست که جرم جسم ثابت باشد.

اگر جسم مرتعش درموقعیتی بالای وضع تعادل اولیه باشد در اینصورت در فنر نیروی فشاری تولید شده و معادلهٔ (b) بصورت زیر :

$$\frac{W}{g}\ddot{X}=-W+(W-kX)=-kX$$

نوشته میشود که نتیجهٔ آن بانتیجهٔ معادلهٔ (b) یکسان است. پس معادلهٔ :

$$\frac{W}{g}\ddot{X}=-kX \qquad \text{(مکرر b)}$$

برای هر موقعیت جسم مرتعش درست و صادق میباشد. برای سهولت در تحریرات علائم زیر راقائل میشویم:

$$p^{2}=\frac{kg}{W}=\frac{g}{\delta_{st}} \qquad (c)$$

بارعایت اختصار (c) در معادلهٔ (b مکرر) نتیجه میشود :

$$\ddot{X}+p^{2}X=0 \qquad (1)$$

اینمعادله طوریست که اگر بجای :

$$X=C_{2}\sin pt \quad \text{یا} \quad X=C_{1}\cos pt$$

گزارده شود درآن صادق خواهد بود. اعداد C_1 و C_2 ثابتهای اختیاری هستند که باید محاسبه شوند. با جمع ایندو جواب عمومی معادلهٔ (۱) چنین میشود :

$$X=C_{1}\cos pt+C_{2}\sin pt \qquad (2)$$

از اینمعادله استنباط میشود که حرکت قائم وزنهٔ W دارای مشخصهٔ ارتعاشی است زیرا که $\sin pt$, $\cos pt$ از توابع متناوب هستند وبعداز گذشت زمان T تکرار میشوند آنچنانکه :

$$p(t+T)-pt=2\pi \qquad (d)$$

این فاصلهٔ زمانی T بدورهٔ ارتعاش * موسوم است ومقدارآن از رابطهٔ (d) بشرح زیربدست میآید :

$$T=\frac{2\pi}{p}$$

با بکار بردن معادلهٔ (c) :

$$T=2\pi\sqrt{\frac{W}{kg}}=2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} \qquad (3)$$

Period of vibration *

بطوریکه از معادلهٔ (۳) دیده میشود دورهٔ ارتعاش فقط تابع مقدار جرم وزنه و ثابت k فنر بوده و با دامنهٔ نوسانها بستگی ندارد. هم چنین میتوان گفت که دورهٔ نوسان وزنهٔ معلق W معادل با دورهٔ نوسان یک پاندول ریاضی است که طول آن مساوی با تغییر مکان استاتیکی δ_{st} باشد. اگر δ_{st} بطور نظری یا تجربی محاسبه گردد دورهٔ تناوب T را از معادلهٔ (۳) میتوان حساب کرد.

تعداد دورهٔ ارتعاش درواحد زمان مثلاً دریک ثانیه را تعداد تناوب یا فرکانس* ارتعاش نامند. اگر آنرا با f بنمائیم خواهیم داشت:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \tag{٤}$$

یک حرکت ارتعاشی که بوسیلهٔ معادلهٔ (۲) بیان گردیده است ارتعاش هارمونیک نامیده میشود. برای تعیین ثابتهای C_1 و C_2 ناشی از انتگراسیون شرایط ابتدائی (یعنی طرز آغاز حرکت) باید درنظر گرفته شود:

مثلاً فرض میکنیم که در آغاز حرکت $(t = 0)$ وزنهٔ W از وضع تعادل خود باندازهٔ X_0 فاصله داشته وسرعت ابتدائی آن نیز $\dot{X}_0$ است. اگر بازای $t = 0$ درمعادلهٔ (۲) بجای $X_0 = X$ قراردهیم بدست میآید:

$$X_0 = C_2 \tag{e}$$

اگر از معادلهٔ (۲) برحسب زمان مشتق گرفته و در مشتق آن بازای $t = 0$، مقدار $\dot{X}_0$ گزارده شود نتیجه میگیریم:

$$\frac{\dot{X}_0}{p} = C_1 \tag{f}$$

اگر مقادیر C_1 و C_2 حاصله از معادلات (e) و (f) را درمعادلهٔ (۲) قراردهیم معادلهٔ زیر برای حرکت ارتعاشی وزنهٔ W بدست خواهد آمد:

$$X = X_0 \cos pt + \frac{\dot{X}_0}{p}\sin pt \tag{٥}$$

میان f و p رابطهٔ زیر برقرار میباشد

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{2\pi}{p}} = \frac{p}{2\pi}$$

مثال ـ یک بار W بر تیری که برروی دوتکیه گاه ساده قرار دارد تکیه کرده است (شکل ۲). طول دهانهٔ آن l میباشد مطلوبست تعیین ثابت فنر و فرکانس ارتعاش آزاد بار در امتداد قائم اگر از وزن تیر صرفنظر شود.

* Frequency که آنرا بسامد و فرکانس طبیعی نیز میگویند.

تغییر مکان قائم استاتیکی تیر زیر بار W بقرار زیراست :

$$\delta_{st}=\frac{Wa^{۲}(l-a)^{۲}}{۳lEI} \qquad (۶)$$

که در آن EI عبارت ازصلبیت خمشی تیر درسطح قائم میباشد .

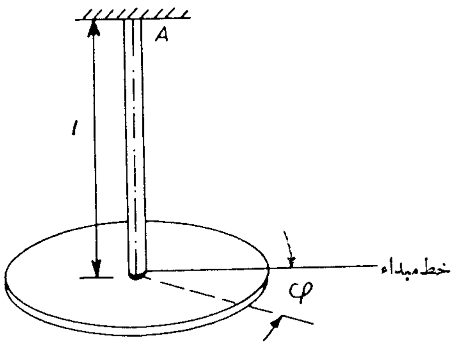
بموجب تعریف ثابت فنری تیرمساویست با :

$$k=\frac{۳lEI}{a^{۲}(l-a)^{۲}} \qquad (۷ \text{ الف})$$

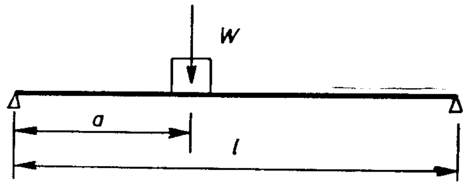
برای پیدا کردن k درفرمول (۶) بجای W و بجای δ_{st} عدد یک گزارده‌شده ومعادلهٔ (۷ الف) بدست آمده است . فرکانس ارتعاش چنین خواهد بود :

$$f=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{۳lEIg}{Wa^{۲}(l-a)^{۲}}} \qquad (۷ \text{ ب})$$

۲ ـ ارتعاش پیچشی . میلهٔ قائمی درنظر میگیریم که در قسمت تحتانی آن یک صفحهٔ افقی فلزی متصل‌شده است(شکل ۳) . اگریک لنگر پیچشی‌درسطح صفحه واردو ناگهانی برداشته شود ارتعاش پیچشی درسطح صفحهٔ فلزی بوجود خواهد آمد .



(شکل ۳)



(شکل ۲)

موقعیت زاویه‌ای صفحه‌را درهرلحظه بوسیلهٔ زاویهٔ φ که یک شعاع صفحهٔمرتعش با امتدادثابتی میسازد میتوان مشخص کرد. این امتداد ثابت یا خط مبداء را امتداد همین شعاع وقتیکه صفحه فلزی درحال سکون است درنظر میگیریم . مانند ثابت فنر در این موردیک‌لنگر پیچشی k تعریف میکنیم آنچنانکه میله و صفحه را باندازهٔ یک رادیان بچرخاند . اگر میله‌بمقطع دایره و بطول l و بقطر d باشد ، از روی فرمولیکه‌برای زاویهٔ پیچشی موجود است مقدار k بشرح زیر محاسبه میشود :

$$k=G\Theta J=\frac{\pi d^{۴}G}{۳۲l} \qquad (۸)$$

که درآن $\Theta=\frac{\varphi}{l}$ واگر $\varphi=۱$ رادیان باشد بفرمول بالا میرسیم . معادلهٔ (۸)

از فرمول* $\varphi = \frac{Tl}{GJ}$ بدست آمده بشرطیکه بجای $\varphi = ۱$ رادیان وبجای $T = k$ گزارده شود.

برای هر زاویهٔ پیچش φ درزمان ارتعاش لنگر پیچشی میله معادل با $k\varphi$ میباشد. معادلهٔ حرکت جسم دواریکه درحول محور ثابتی میگردد بیان میداردکه حاصلضرب لنگر ماند جسم بالنسبه باین محور ثابت و شتاب زاویه‌ای مساویست بالنگر نیروهای خارجی که برجسم اثر میکنند بالنسبه بمحوردوران. دراین حالت این لنگر مساوی و مخالف است با لنگر پیچشی $k\varphi$ که بر میله اثر میکند و معادلهٔ حرکت چنین نوشته میشود:

$$J\ddot{\varphi} = -k\varphi \qquad (۹)$$

در فرمول (۹) J عبارتست از لنگر ماند صفحه بالنسبه بمحور دوران که دراینحال با محور میله یکی میباشد و $\ddot{\varphi}$ عبارت از شتاب زاویه‌ای صفحه میباشد. اگر

$$p^{۲} = \frac{k}{J} \qquad (۱۰)$$

معادلهٔ حرکت (۹) بصورت زیر نوشته میشود:

$$\ddot{\varphi} + p^{۲}\varphi = ۰ \qquad (۱۱)$$

این معادله دارای شکلی مانند معادلهٔ (۱) میباشدوخواهیم داشت:

$$\varphi = \varphi_{\circ} \cos pt + \frac{\dot{\varphi}_{\circ}}{p} \sin pt \qquad (۱۲)$$

درمعادلهٔ (۱۲)، $\varphi_{\circ}$ و $\dot{\varphi}_{\circ}$ بترتیب عبارت از تغییرمکان زاویه‌ای وسرعت زاویه‌ای میباشدکه صفحه درلحظهٔ آغاز حرکت ($t = ۰$) دارد. مانند حالت قبل نتیجه میشودکه:

$$T = \frac{۲\pi}{p} = ۲\pi\sqrt{\frac{J}{k}} \qquad (۱۳)$$

وتعداد تناوب آن بشرح زیر بدست میآید:

$$f = \frac{۱}{T} = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{J}} \qquad (۱٤)$$

درصورتیکه صفحه مدور ودارای ضخامت یکنواخت وقطر D باشد لنگر ماند بصورت زیر میباشد:

$$J = \frac{WD^{۲}}{۸g}$$

که درآن W عبارتست از وزن صفحه پس خواهیم داشت:

---

* برای اطلاع از چگونگی اثبات اینفرمول بمعادلهٔ (٤ ، ٤) صفحهٔ ۷۳ طبع چهارم کتاب:

"Elements of Strength of Materials"

تألیف آقایان S.Timoshenko و D.H.Young که درسال ۱۹٦۲ بوسیلهٔ بنگاه D.Van Nostrand درآمریکای شمالی بچاپ رسیده است مراجعه شود.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4WD^3l}{\pi g d^4 G}} \quad \text{و} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi g d^4 G}{4WD^3l}} \qquad \text{(۱۵ الف و ب)}$$

۳ ـ ارتعاشات اجباری * : حالت ماندگار ** ـ در مباحث بالا ارتعاشات آزاد دستگاههائیکه دارای یکدرجه آزادی‌بود درنظر گرفته‌شد. اکنون حالتی را درنظر میگیریم که برروی وزنهٔ W اضافه برنیروهای ثقل و فنر، یک نیروی مزاحم *** متناوب‌بمقدار $Q\sin\omega t$ اثر کند. دوره وتعداد تناوب این نیرو بترتیب عبارتست از:

$$f_1 = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{و} \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$$

اگر مثال فنر را دراینحالت بررسی و حل کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{W}{g}\ddot{X} = W - (W + kX) + Q\sin\omega t$$

اگر علائم اختصاری زیر را بکاربریم:

$$q = \frac{Qg}{W} \quad \text{و} \quad p^2 = \frac{kg}{W}$$

معادلهٔ بالا بشرح زیر نوشته میشود:

$$\ddot{X} + p^2 X = q\sin\omega t \qquad (16)$$

اگر یک جواب خصوصی برای اینمعادلهٔ فاضله بصورت:

$$X_p = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

اختیار نموده ودرمعادلهٔ (۱۶) قراردهیم نتیجه میشود:

$$A = \frac{q}{p^2 - \omega^2} \ , \quad B = 0$$

بشرح بالا جواب خصوصی بصورت زیر درمیآید:

$$X_p = \frac{q\sin\omega t}{p^2 - \omega^2} \qquad (17)$$

---

* Forced Vibrations

** Steady State — اصطلاح ماندگار بجای این لغت از ابتکارات آقای دکتر مهندس حسن شمسی است که در کتابهای خود آنرا بکار برده‌اند.

*** Disturbing Force

با افزودن این جواب خصوصی بطرف راست معادلهٔ (۲) عبارت زیر بدست میآید :

$$X = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{q \sin \omega t}{p^2 - \omega^2} \qquad (18)$$

معادلهٔ (۱۸) دارای دوثابت انتگراسیون و جواب کلی معادله (۱۶)میباشدمعرف حرکت حالت زودگذر* اولیه است. دیده میشود که این عبارت شامل دوقسمت است :

دو جملهٔ نخستین آن نمایش ارتعاش آزاد که قبلاً مورد بررسی قرارگرفت و جملهٔ سوم عبارت از ارتعاش اجباری دستگاه میباشد و ضمناً دیده میشود که پس از گذشتن زمان زیادی اثر دوجملهٔ اول اندك شده و درحالت ارتعاش ماندگار تناوب بدورهٔ $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ (یعنی دورهٔ تناوب نیروی مزاحم) خواهد بود . پس با صرفنظر کردن اثردوجملهٔ اول خواهیم داشت :

$$X = \frac{Q}{k} \left(\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \right) \sin \omega t \qquad (19)$$

در فرمول (۱۹) دیده میشود که اگر $p = \omega$ یعنی اگر دورهٔ تناوب نیروی مزاحم معادل دورهٔ تناوب جسم مرتعش گردد تغییر مکان بی‌نهایت و جسم متلاشی میگردد . در این حال گویند که **هم‌آهنگی** ** حاصل شده است .

در مورد ارتعاش پیچشی هم ممکن است لنگر متناوب مزاحمی بعبارت $M \sin \omega t$ وجود داشته باشد که با استدلالی شبیه بآنچه فوقاً گفتیم خواهیم داشت :

$$\ddot{\varphi} + p^2 \varphi = \frac{M}{J} \sin \omega t \qquad (20)$$

باصرفنظر کردن از جملات (۱۲) جواب معادلهٔ (۲۰) منحصر بجواب خصوصی آن خواهد شد یعنی :

$$\varphi = \frac{M}{J(p^2 - \omega^2)} \sin \omega t \qquad (21)$$

آنچه درمورد هم آهنگی درمثال فوق گفتیم دراینمورد نیز صادق است .

٤ ـ ارتعاش آزاد با استهلاك ناشی از اصطکاك *** ـ ارتعاش دستگاه نموده شده در (شکل ۱) را مجدداً مورد توجه قرار داده و فرض میکنیم که جسم مرتعش W درحین حرکت خود با مقاومتی برخورد میکند که متناسب با سرعت آن باشد .

در چنین حالتی بجای معادلهٔ (b) صفحهٔ(۱۱۳)خواهیم داشت:

Free Vibration With Viscous Damping ***   . Resonance **   Transient state *

$$\frac{W}{g}\ddot{X} = W - (W + kX) - c\dot{X} \tag{a}$$

جملهٔ آخر سمت راست معادلهٔ (a) معرف نیروی استهلاکی که متناسب باسرعت $\dot{X}$ است میباشد. علامت منها نشان میدهد که این نیرو درجهت مخالف با سرعت اثر میکند. ضریب c عدد ثابتی است که بستگی بنوع وسیله ایکه برای استهلاك بکار برده میشود دارد و از لحاظ عدد برابر با مقدار نیروی استهلاکی است اگر سرعت مساوی واحد باشد.

با تقسیم معادلهٔ (a) بر $\frac{W}{g}$ و استعمال علائم اختصاری:

$$p^2 = \frac{kg}{W} \quad , \quad \frac{cg}{W} = 2n \tag{الف و ب b}$$

برای ارتعاش آزاد با استهلاك ناشی از اصطکاك معادلهٔ زیر نتیجه‌میشود:

$$\ddot{X} + 2n\dot{X} + p^2 X = 0 \tag{۲۲}$$

برای بحث دراین معادله روش متداول درحل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را بکار برده وفرض می‌کنیم که معادلهٔ فوق جوابی بصورت:

$$X = e^{mt} \tag{c}$$

داشته باشد که درآن e مبنای لگاریتم‌طبیعی (نپیرین)، t زمان و m عدد ثابتی است که با استعمال عبارت (c) در رابطهٔ (۲۲) مشخص خواهد شد. اگر بجای X درمعادلهٔ (۲۲) رابطهٔ (c) گزارده شود نتیجه میگردد:

$$m^2 + 2nm + p^2 = 0$$

ریشه‌های این معادله بصورت زیر خواهد بود:

$$m = -n \pm \sqrt{n^2 - p^2} \tag{d}$$

نخست حالتی را درنظر میگیریم که مقدار n^2 که تابع استهلاك میباشد کوچکتر از p^2 باشد. درچنین حالتی مقدار:

$$p_1^2 = p^2 - n^2 \tag{e}$$

مثبت خواهد بود وبرای m دوریشهٔ موهومی بدست خواهد آمد:

$$m_1 = -n + p_1 i \ , \ m_2 = -n - p_1 i$$

باگزاردن این ریشه‌ها درعبارت (c) دو جواب خصوصی معادلهٔ (۲۲) و با جمع یا تفاضل ایندو جواب که

درضرائب ثابتی ضرب شده باشد نیز جوابی ازآنمعادله بدست خواهد آمد . بدین ترتیب جوابهای اینمعادله را بصورت زیر میتوان نوشت :

$$X_1=\frac{C_1}{2}(e^{m_1t}+e^{m_2t})=C_1e^{-nt}\cos p_1t$$

$$X_2=\frac{C_2}{2i}(e^{m_1t}-e^{m_2t})=C_2e^{-nt}\sin p_1t$$

باجمع ایندوبایکدیگر جواب عمومی معادلهٔ (۲۲) بشکل زیر بدست خواهد آمد :

$$X=e^{-nt}(C_1\cos p_1t+C_2\sin p_1t) \tag{۲۳}$$

که درآن C_1 و C_2 ضرایب ثابتی میباشد که درهرحالت خاص بایستی باشرایط ابتدائی محاسبه گردد .

عبارت داخل پرانتز معادلهٔ بالا بهمان صورتی است که قبلاً برای ارتعاشات بدون استهلاك (معادلهٔ ۲) بدست آمده بود واین معرف یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب زیراست :

$$T=\frac{2\pi}{p_1}=\frac{2\pi}{p}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{n^2}{p^2}}} \tag{۲٤}$$

با مقایسهٔ این عدد با دورهٔ ارتعاش $\frac{2\pi}{p}$ که قبلاً برای ارتعاشات بدون استهلاك بدست آمده بود مشاهده میگردد که درنتیجهٔ وجود استهلاك دورهٔ ارتعاشات اضافه میگردد ولی اگر n درمقابل p کوچک باشد این افزایش مقدار کوچکی از مرتبهٔ دوم خواهد بود . بنابراین در موارد استعمال عملی میتوان بادقت کافی فرض کرد که وجود استهلاك اندك دورهٔ ارتعاشات راتغییر نخواهد داد .

جملهٔ e^{-nt} درمعادلهٔ (۲۳) تدریجاً بازمان کاهش مییابد وارتعاشاتی که بدواً تولید شده بود مستهلك خواهد شد . برای تعیین ضرایب C_1 و C_2 در معادلهٔ (۲۳) فرض میکنیم که در آغاز ارتعاش $(t=o)$ جسم مرتعش از محل تعادل خود باندازهٔ X جابجا شده ودارای سرعت ابتدائی $\dot{X}_o$ باشد . بااستفاده ازاین شرایط بدست میآید :

$$C_1=X_o \tag{f}$$

و

$$C_2=\frac{(\dot{X}_o+nX_o)}{p_1} \tag{g}$$

اگرمقادیر C_1 و C_2 حاصله از عبارات (f) و (g) رادرمعادلهٔ (۲۳) بگزاریم عبارت X چنین نوشته میشود :

$$X=e^{-nt}\left(X_o\cos p_1t+\frac{\dot{X}_o+nX_o}{p_1}\sin p_1t\right) \tag{۲٥}$$

دراین عبارت جملهٔ اول که متناسب با $\cos p_1 t$ است فقط تابع تغییر مکان ابتدائی X_0 میباشد درحالیکه جملهٔ دوم آن که متناسب با $\sin p_1 t$ است تابع X_0 و $\dot{X}_0$ میباشد.

معادلهٔ (۲۰) را بصورت زیر میتوان نوشت:

$$X = Ae^{-nt}\cos(p_1 t - \alpha) \qquad \text{(۲۰ مکرر)}$$

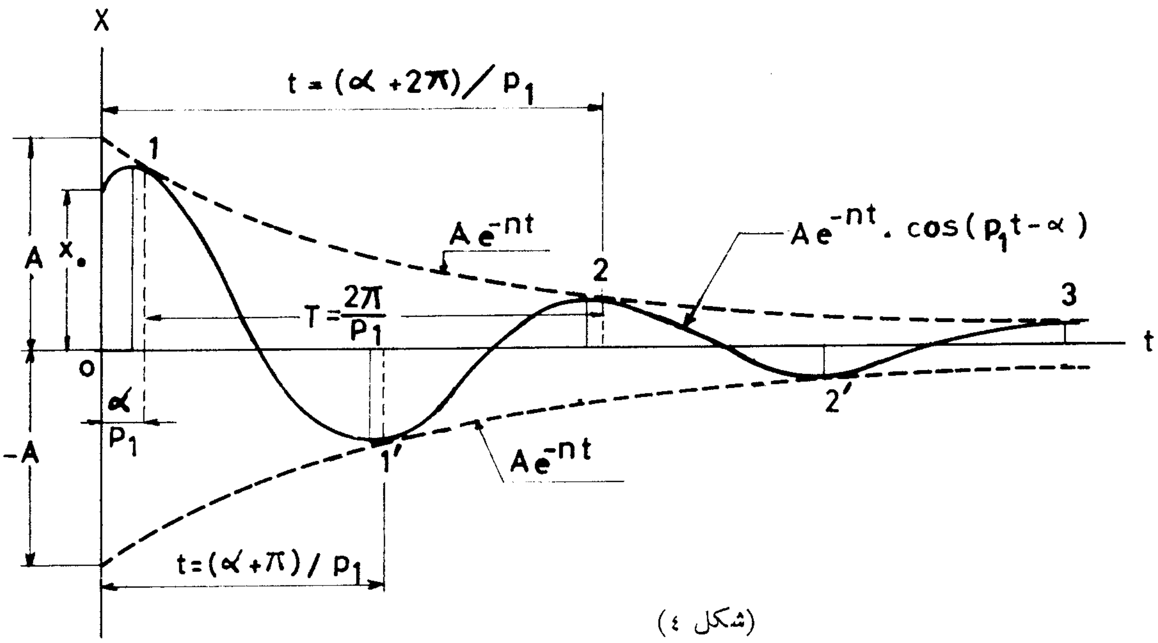
که درآن:

$$A = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{p_1} + \frac{nX_0}{p_1}\right)^2}$$

و:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{X}_0}{X_0 p_1} + \frac{n}{p_1}\right)$$

که آنرا زاویهٔ فاز* مینامند. در(شکل ٤) منحنی نمایش تغییرات X برحسب زمان نموده شده است.



(شکل ٤)

نمو استهلاک تابع مقدار ثابت n میباشد [بمعادلهٔ (b الف) صفحهٔ ۱۲ رجوع شود]. از معادلهٔ عمومی (۲۰) دیده میشود که دامنهٔ ارتعاش بعداز هرسیکل به نسبت:

$$e^{-nT} : 1 \qquad \text{(h)}$$

کاهش می‌یابد واین کاهش برحسب قانون تصاعد هندسی میباشد. معادلهٔ (h) را برای تعیین تجربی ضریب استهلاک میتوان بکار برد. برای این منظور کافی است بوسیلهٔ تجربه مشخص گردد که بعداز گذشت عدهٔ معینی سیکل بچه نسبت دامنهٔ ارتعاش تقلیل می‌یابد.

Phase Angle *

مقدار :

$$nT=\frac{2\pi}{p}\,\frac{n}{\sqrt{1-\frac{n^2}{p^2}}} \qquad (۲۶)$$

که نمّو استهلاک تابع آنست معمولاً موسوم به‌کاهش لگاریتمی * میباشدو مقداراً مساویست با تفاوت میان لگاریتم دو دامنهٔ ارتعاش متوالی که‌در زمانهای t و $t+T$ اندازه‌گیری شده باشد .

در بحث معادلهٔ (۲۲) قبلاً فرض شده بود که $p^2 > n^2$ باشد. در حالتیکه $p^2 < n^2$ باشد هردو ریشهٔ معادلهٔ (d) حقیقی و منفی میگردد . باگزاردن مقادیر آنها در عبارت (c) دو جواب خصوصی معادلهٔ (۲۲) و بالنتیجه جواب عمومی همین معادله بصورت زیر نوشته میشود :

$$X=C_1e^{m_1t}+C_2e^{m_2t}$$

این جواب دیگرمعرف یک حرکت نوسانی نیست و مقاومت ابراز شدهٔ ناشی از اصطکاک آنقدر زیاد است که جسم بااینکه از موضع تعادل خود تغییر مکان یافته مرتعش نخواهد شد وفقط حالت قهقرائی پیدا کرده وتدریجاً بآن موضع میل میکند. چنین حرکتی را غیر متناوب ** مینامند .

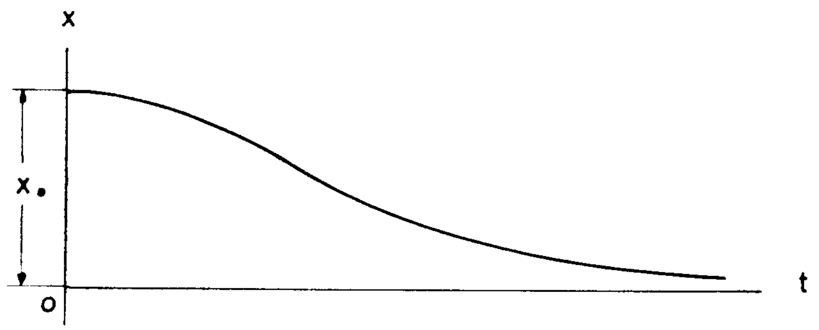
اگربازای $t=0$ مقدار:

$$0=\dot{X} \text{ و } X_0=X$$

باشد عبارت X بصورت زیر نوشته میشود :

$$X=\frac{X_0}{m_1-m_2}\left(m_1e^{m_2t}-m_2e^{m_1t}\right) \qquad (۲۷)$$

منحنی نمایش X برحسب زمان درشکل (۵) نموده شده است .



(شکل ۵)

مقدار بحرانی استهلاک که بازای آن حرکت خاصیت ارتعاشی خود را از دست میدهد عبارتست از $n=p$

* Logarithmic Decrement

** Aperiodic

وبا استعمال علامت اختصاری (b الف) برای چنین حالتی بدست خواهیم آورد :

$$c_{cr} = ۲\sqrt{\frac{kW}{g}} \qquad (۲۸)$$

در مبحث قبل ما همیشه مقدار n را مثبت فرض کردیم یعنی نیروی استهلاکی را نیروی مقاومی درنظر گرفتیم. ازاین قرار درنتیجهٔ عمل این نیرو انرژی تلف میگردد و دامنهٔ حرکت تدریجاً کاهش می‌یابد و حرکت ازبین میرود .

معذلک حالاتی وجود دارد* که درآن حالات درضمن حرکت انرژی داخل دستگاه ودرنتیجهٔ این امر دامنهٔ ارتعاش با افزایش زمان اضافه میگردد .

درچنین حالاتی اصطلاح استهلاك منفی** گاهی بکار برده میشود .

ازجواب (۲۳) دیده میشود که اگر n منفی باشد جملهٔ e^{-nt} با زمان افزایش می‌یابد و دامنهٔ ارتعاش تدریجاً بلندتر میگردد. حالت $n > 0$ معرف یک حرکت پایدار وحالت $n < 0$ معرف یک حرکت ناپایدار میباشد. تشخیص حالاتیکه درآن‌ها یک عنصر مقاوم ساختمانی ممکن است دارای حرکت پایدار یا حرکت ناپایدارگردد واجد اهمیت میباشد زیرا یک حرکت ناپایدار ممکن است منجر بانهدام عنصر مقاوم ساختمانی شود .

---

*برای اطلاع از این حالات بموضوع ۲۰ مأخذ نمرهٔ[۸] رجوع شود.

** Negative Damping