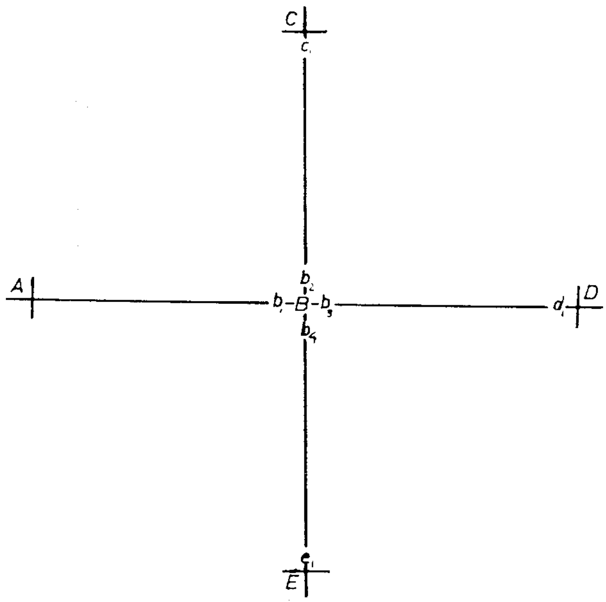
بررسی دو روش تقریبی از حل قابهای هیپراستاتیک

از

مهندس جمشید حسیبی

درشماره گذشته درمقاله‌ای تحت عنوان «راه جدید درمحاسبه‌ی قابهای هیپراستاتیک» ثابت کردم که ضریب انتقال لنگر ازگره غیره مشخص A به ضلع های گره مجاوره‌آن «B» (شکل الف) حداکثر یا $\frac{1}{500}$ تقریب بکمک فرمول :



شکل الف

$$K_1 = \frac{1}{2} - \frac{b_1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{4}(b_1+b_2c_1+b_3d_1+b_4e_1)} \qquad (1)$$

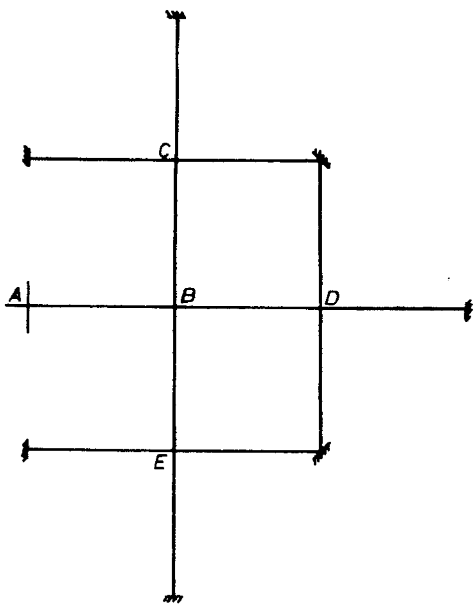
$$K'_1 = -\frac{b_2}{2}\left(1-\frac{c_1}{4}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{4}(b_1+b_2c_1+b_3d_1+b_4e_1)} \qquad (2)$$

$$K'_2 = -\frac{b_3}{2}\left(1-\frac{d_1}{4}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{4}(b_1+b_2c_1+b_3d_1+b_4e_1)} \qquad (3)$$

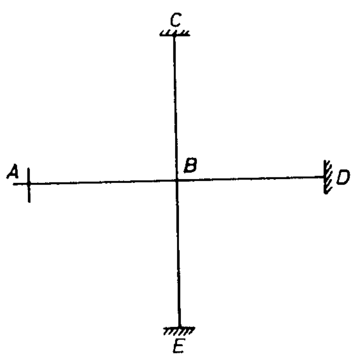
$$K'_3 = -\frac{b_4}{2}\left(1-\frac{e_1}{4}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{4}(b_1+b_2c_1+b_3d_1+b_4c_1)} \qquad (۴)$$

بدست میآید که درآن b_1 ، b_2 ، b_3 و b_4 ضریت تقسیم لنگر $\left(\frac{\frac{I}{l}}{\Sigma\frac{I}{l}}\right)$ مربوط به‌ضلع های BA ، BC ، BD و BE در گره B و c_1 ، d_1 ، e_1 ضریب تقسیم لنگر ضلع های CB ، DB و EB مربوط به گره‌های C ، D و E میباشند .

این فرمول وقتی بدست آمد که از اثر لنگرهای بازگشتی ازگره‌های دیگری که بگره C ، D و E منتهی میشوند روی ضلع های گره B صرفنظر شده باشد . یعنی بافرض گیردار بودن ضلع های منتهی‌به C و D و E درگره‌های دیگر (شکل ب) .



شکل ب



شکل ج

از روی رابطه های (۱) ، (۲) ، (۳) و (۴) میتوان با دقتی کمتر فرمول ساده‌تری بدست آورد . بااین فرض که‌این‌بار از اثر لنگرهای بازگشتی ازگره‌های C ، D و E روی ضلع های گره B صرفنظر نمود یعنی‌فرض کرد که ضلع های BC، BD و BE درگره‌های C ، D ، E گیردار باشند (شکل ج) . دراین حالت مقدارهای c_1 ، d_1 و e_1 برابر صفر خواهند بود ودر نتیجه فرمول های (۱) ، (۲) ، (۳) و (۴) بصورت ساده زیر خلاصه‌میشوند .

$$K_1 = \frac{2(1-b_1)}{4-b_1} \qquad (۵)$$

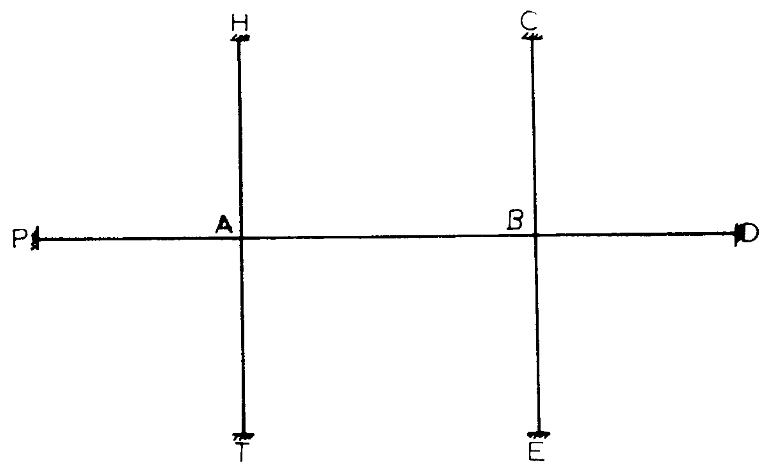
$$K'_1 = \frac{-۲b_۲}{٤-b_1} \qquad (٦)$$

$$K'_۲ = \frac{-۲b_۳}{٤-b_1} \qquad (٧)$$

$$K'_۳ = \frac{-۲b_٤}{٤-b_1} \qquad (٨)$$

رابطه‌ی (٥) مستقیماً بافرض گیردار بودن C ، D و E درکتاب Modern Steel Structure by Grinter ثابت شده وبرای استفاده‌ازین ضریب درطرح اولیه ساختمانهای هیپراستاتیک روشی ذکرگردیده که مختصراً در پاورقی بدان اشاره شده است [۱]

۱ـ در روش ذکر شده درکتاب Modern Seel Structure dy Grinter تیرهای قاب‌را بافرض گیردار بودن ضلع های‌منتهی‌بآن تک تک‌بارگزاری‌و حل‌می‌کنند وسپس‌نتیجه‌رادرگره‌های‌دیگر تأثیر میدهند. بعنوان مثال: تیر AB منتهی‌به‌گره‌های H،P،T و C،D،E فرض میشود. دراین روش‌از اثرلنگرهای بازگشتی گره‌های E،D،C روی B و T ، PH برروی A صرفنظر میشود (شکل ل) سپس لنگرگیرداری تیر AB رادراین قاب‌پخش میکنند بااین‌تفاوت‌که ضریب انتقال از A به H ، P و T وازB به C ، D و E را از روی فرمول $K = \frac{۲(۱-b)}{٤-b}$ محاسبه می‌نمایند بجای b دراین رابطه‌بترتیب ضریب تقسیم ضلع های HA ، PA ، TA ، CB ، DB وEB درگره‌های H ، P ، T C ، D ، E را قرار میدهند و طبعاً عددی‌کوچکتر ویا حداکثر برابر $\frac{۱}{۲}$ خواهد بود . و همچنین برای دقت بیشترو منظور داشتن حالت نیمه‌گیر دارای‌گره‌هائیکه گیردار فرض شده بودند بر روی تیر AB ، بجای ضریب تقسیم $\alpha = \frac{\frac{I}{l}}{\sum\frac{I}{l}}$ از ضریب تقسیم‌تصحیحی $\alpha_i = \frac{\frac{I_i}{l_i}\beta_i}{\sum\frac{I}{l}\beta}$ استفاده میشود (توضیح راجع به‌β درشماره‌ی‌گذشته‌مجله

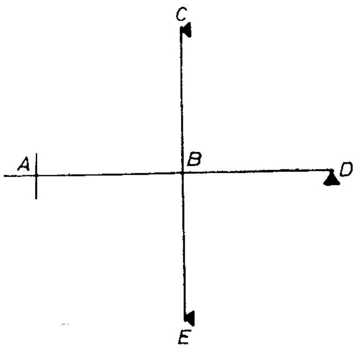


(شکل ل)

وهمچنین بطور اختصار در پاورقی صفحه ۱۳٦ آمده است) .

این عمل را درمورد تیرهای لازم انجام و نتیجه را درجدول ضبط‌کرده و حاصل‌لنگرهای وارد به هرگره را با تقریب‌کافی بدست میآورند .

هدف از این مقاله محاسبه‌ی میزان حداکثر خطای این ضریب (ضریب K_1) و ایجاد سهولت و سرعت بیشتر درحل قابها و بالاخره چگونی حذف خطا می‌باشد.



(شکل د)

محاسبه‌ی میزان حداکثر خطا

نظر باینکه در محاسبه‌ی ضریب ها از اثر لنگرهای بازگشتی ازگره C ، D و E روی ضلع های گره B صرفنظر شده ، حداکثر خطا وقتی اتفاق می‌افتد که ضلع های BC ، CD و BE درگره های C، D و E مفصلی باشند (شکل د). دراین حالت $c_1=d_1=e_1=1$ بوده ومیزان خطای ضریب ها بشرح زیر خواهد بود.

۱ ـ میزان حداکثر خطای K_1

درحالتیکه $c_1=d_1=c_1=1$ باشد مقدار k_1 از رابطه‌ی :

$$k_1=\frac{1}{2}(1-b_1)$$

بدست میاید. لذا میزان حداکثر خطا وقتی که ضریب پخش لنگر ضلع BA درگره B مساوی b_1 باشد برابر خواهد بود با:

$$\delta=K_1-k_1$$

$$\delta=\frac{2(1-b_1)}{4-b_1}-\frac{1}{2}(1-b_1)$$

$$\delta=\frac{1}{2}\cdot\frac{b_1(1-b_1)}{4-b_1}$$

مقداری از b_1 که ماکزیمم خطا را میدهد با قرار دادن $\frac{d(\delta)}{d(b_1)}=0$ بدست میآید.

$$\frac{d(\delta)}{d(b_1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{4-8b_1-b_1^2}{(4-b_1)^2}\right]$$

$$\frac{d(\delta)}{d(b_1)}=0 \longrightarrow 4-8b_1+b_1^2=0 \longrightarrow b_1=4\pm\sqrt{12}$$

چون b_1 همیشه کوچکتر از واحد است لذا $b_1 \# 0.54$ ماکزیمم خطا را وقتی گره های C ، D ، E مفصلی باشند خواهد داد. ومیزان این خطا معادل است با :

$$\delta_m=0.036$$

تغییرات میزان حداکثرخطا برحسب تغییرات b_1 درجدول (I) خلاصه شده است و چنانکه ملاحظه میشود تغییرات خطا همیشه دریک جهت می‌باشد یعنی همیشه لنگر انتقالی که با استفاده از این رابطه بدست میآید از مقدار حقیقی بزرگتر میباشد.

۲ ـ میزان حداکثر خطای K'_j

همچنین در حالیکه $c_1 = d_1 = e_1 = 1$ باشد مقدار k'_J از رابطهٔ

$$k'_J = -\frac{b_i}{2}$$

بدست میآید . لذا حداکثر خطای K'_J معادل است با :

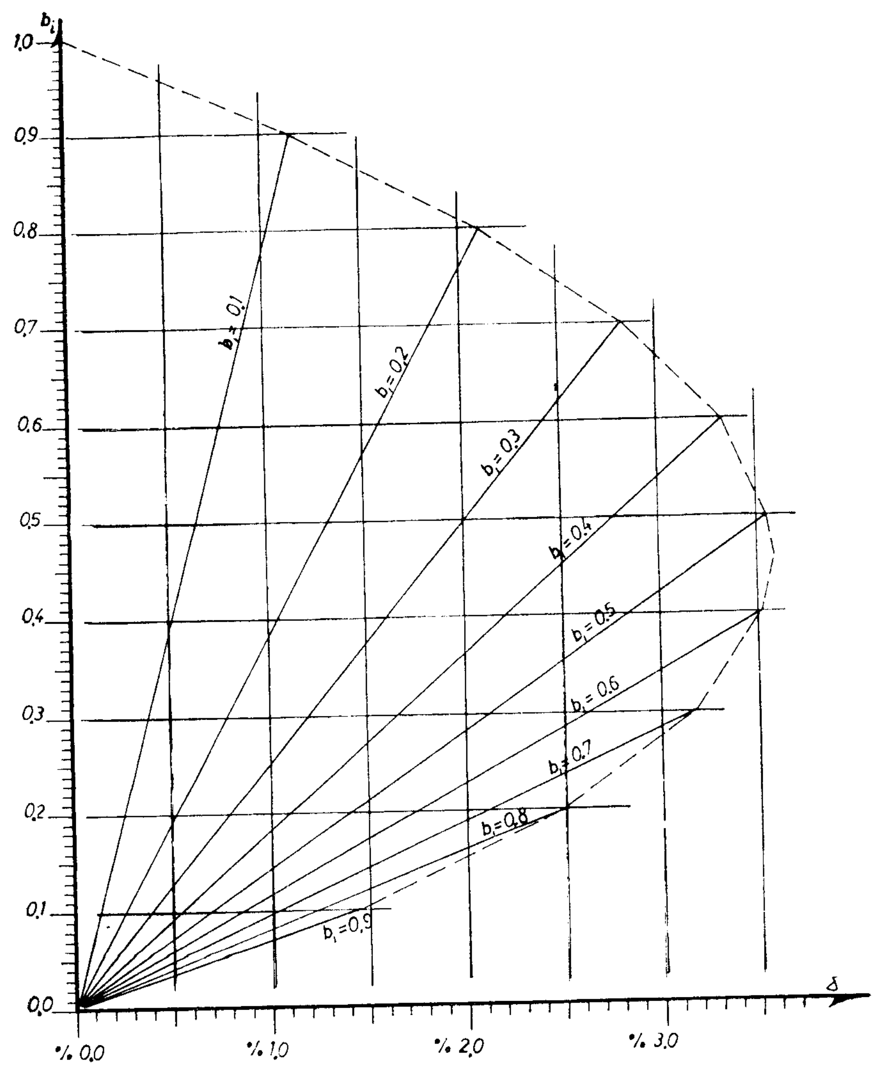
$$\delta = K'_J - k'_J$$

$$\delta = -\frac{2b_i}{4 - b_1} + \frac{b_i}{2}$$

$$\delta = -\frac{b_i}{2}\left(\frac{b_1}{4 - b_1}\right)$$

b_i	δ
0.1	0.012
0.2	0.021
0.3	0.028
0.4	0.033
0.5	0.036
0.6	0.035
0.7	0.032
0.8	0.025
0.9	0.0145
1.0	0.000

جدول (I)



(شکل ه)

حداکثر خطاوقتی اتفاق میافتدکه ۰٫۵۴ = b_1 , ۰٫۴٦ = b_i دراینحال میزان خطاحدود ۳٫۹ درصد خواهدبود .

تغییرات خطا برحسب تغییرات b_i و b_1 درآباك شکل(ه) رسم شده است. دراین حالت نیزملاحظه میشود تغییرات خطا دریک جهت و میزان لنگر انتقالی با استفاده ازاین ضریب از نظر قدر مطلق از مقدار حقیقی بزرگتر میباشد.

باید توجه داشت که هیچگاه میزان خطا در لنگر انتقالی از مقادیر داده شده درجدول (I) وآباك شکل (ه) تجاوز نمیکند زیراگرههای C ، D , E غالباً کاملاً آزاد نبوده و میزان خطا برحسب درجه‌ی گیرادری این نقاط از مقدارهای داده شده کمتر خواهد بود .

بمنظور سرعت بیشتر در محاسبه‌ی[1] β_i و K_1 برحسب مقادیر b_1 ، آباك شکل(و) رسم شده‌است.

روی محور b مقدار b_1 و روی محور K مقدار $K_1=\frac{۲(۱-b_1)}{٤-b_1}$ وروی محور β مقدار $\beta=\frac{۱}{۲-K_1}=\frac{٤-b_1}{٦}$ (۹) مشخص شده‌است.

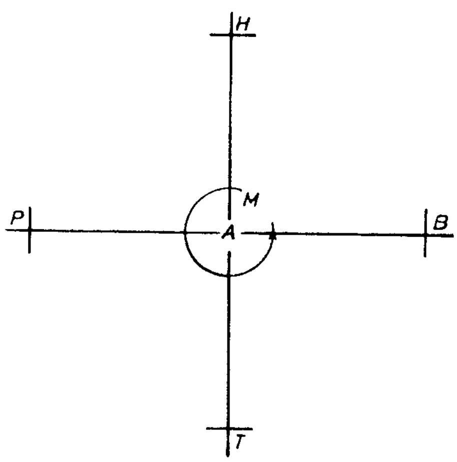
ضمناً درسمت دیگر منحنی میزان حداکثر خطا برحسب مقادیر b_1 (مقادیر جدول I) رسم‌شده‌است.

استفاده از ضریب‌ها درحل قابهای هیپراستاتیک

۱ - بامحاسبه‌ی ضریب های K_1 ، K'_1 ، K'_2 ، K'_3 , β_i از روی رابطه‌های (۵) ، (٦) ، (۷) و (۸) و (۹) میتوان روشی راکه در شماره‌ی قبل ذکر شد بکار برد منتها دراین مود خطاحدود ۳ تا ٤ درصد خواهد بود .

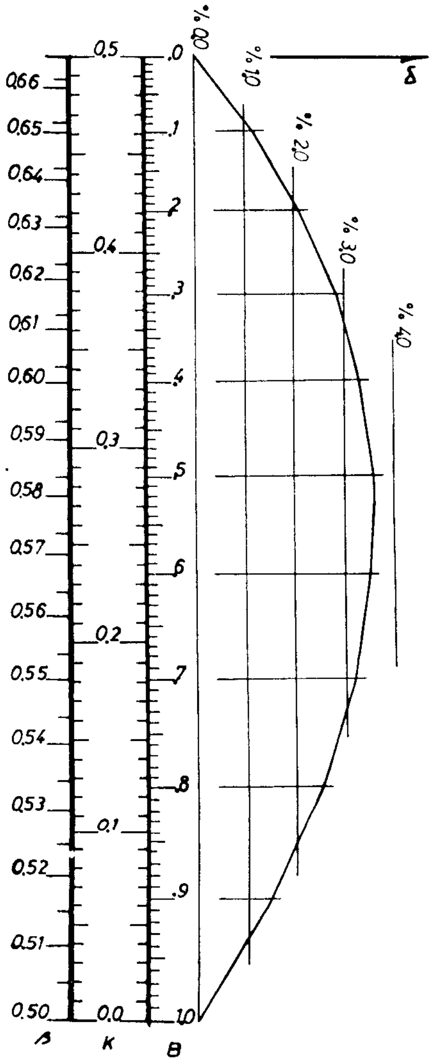
۲ - روش ذکر شده درکتاب Grinter را میتوان بطریق زیر ساده ترکرد لنگرگیرداری ضلع AB را در هریک ازگره‌های B و A به ترتیب در

$$\frac{\frac{I_{AB}}{l_{AB}}\beta_{AB}}{\sum_A\frac{I}{l}\beta} \quad \text{و} \quad \frac{\frac{I_{AB}}{l_{AB}}\beta_{BA}}{\sum_B\frac{I}{l}\beta}$$



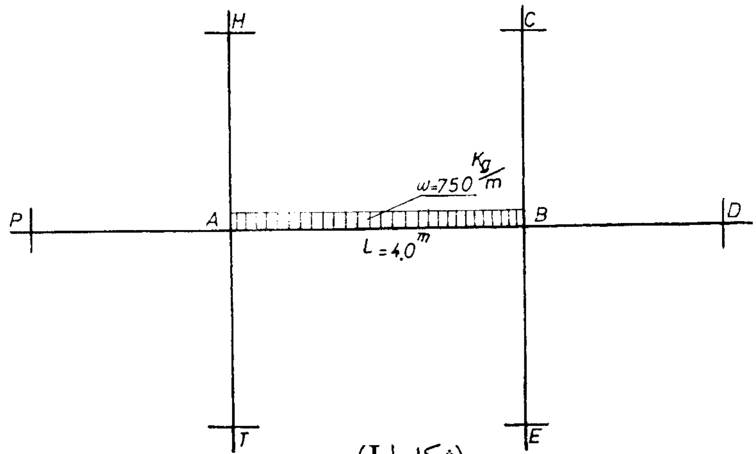
(شکل ز)

۱- درشماره قبل ثابت شدکه‌اگر لنگر نا متعادل M به گره A وارد شود (شکل‌ز) این لنگر به نسبت $\alpha_i=\frac{\frac{I_i}{l_i}\beta_i}{\sum\frac{I}{l}\beta}$ تقسیم خواهد شدکه $\beta_i=\frac{۱}{۲-K_i}$ میباشد(K_iضریب انتقال لنگراز A به گره دیگر در ضلع مربوطه میباشد) .

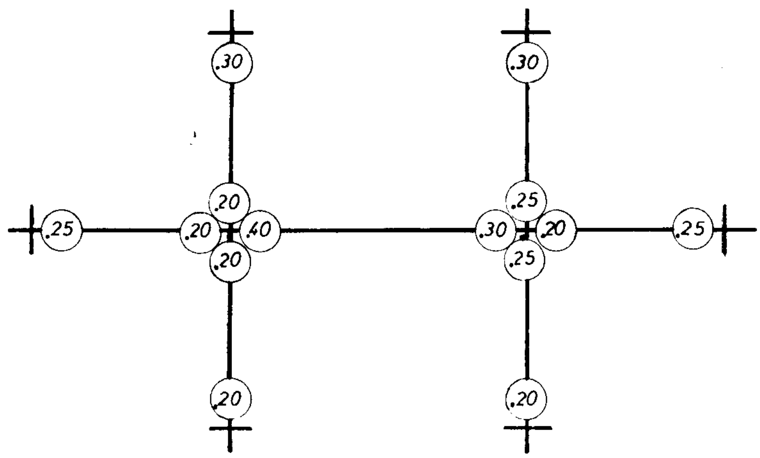


Eng Jamshid Hassibi

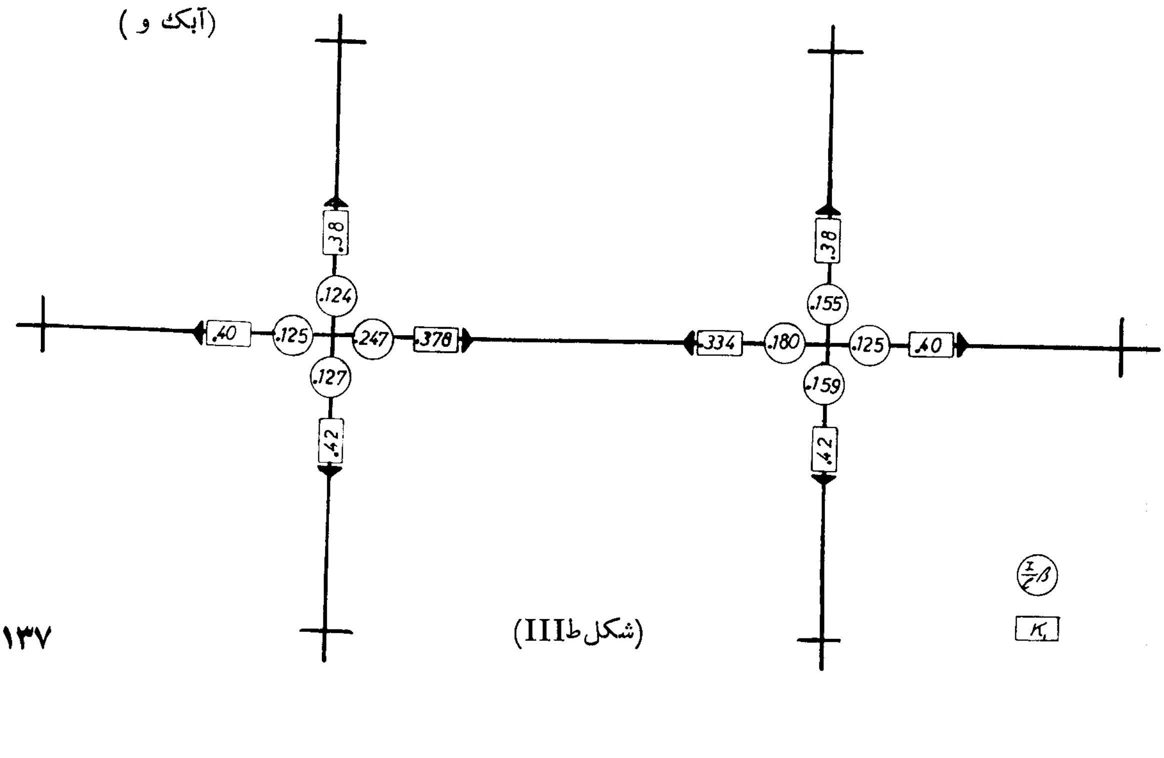
(آبک و)



(شکل ط I)



(شکل ط II)



(شکلطIII)

ضرب نمود (مرحله اول) . لنگر حاصل را با توجه به ضریب انتقال های A به B و B به A به گره های A و B منتقل نمود (مرحله دوم) . بدین ترتیب لنگر وارد به طرفین ضلع AB بدست می آید این لنگر را با علامت مخالف بین سه ضلع دیگر منتهی به گره های A و B به نسبت $\beta\frac{I}{l}$ مربوطه تقسیم کرد (مرحله سوم) نتیجه را بکمک ضریب انتقال هرضلع به طرف دیگر منتقل کرد (مرحله چهارم) .

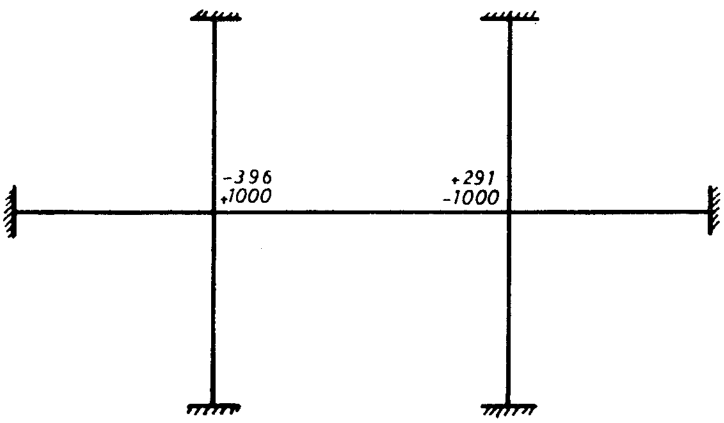
برای نمونه مثال شکل (ط I) را بدین روش حل می کنیم .

درشمای ط II ضریب پخش $\left(\frac{\frac{I}{l}}{\sum\frac{I}{l}}\right)$ هرضلع درگره ها داده شده ، درشمای (طIII) مقدار K_1 و $\beta\frac{I}{l}$ برای هرضلع محاسبه و روی آن نوشته شده است .

شکل (طIV) ، (طV) ، (طVI) و (طVII) بترتیب مرحله های اول ، دوم ، سوم و چهارم حل قاب به روش فوق را نشان میدهد .

حذف خطای K_1

ذکر شده که مقدار ضریب انتقال از رابطه ی (۱) با تقریب $\frac{1}{500}$ بدست میآید . در استفاده از فرمول $K_1=\frac{2(1-b_1)}{4-b_1}$ مقدار $b_2c_1+b_3d_1+b_4e_1=u=0$ فرض شده ولی عموماً صفر نیست و درنتیجه خطائی دست میدهد .

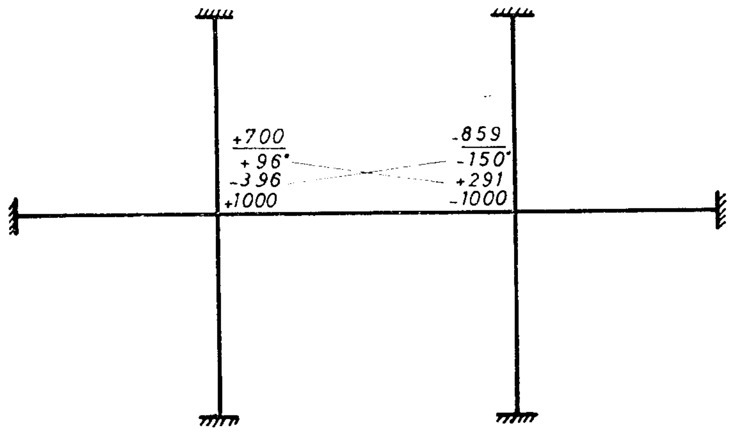


(شکل طIV)

در آباک شکل (ی) تغییرات خطا برحسب مقدارهای u برای $0.1 \leqslant b_1 \leqslant 0.9$ رسم شده است .
برای حذف خطا کافی است درهرمورد مقدار تقریبی u را محاسبه و باتوجه بمقدار b_1 میزان خطا را ازروی آباک (ی) محاسبه و آنرا از مقداری که رابطه ی (۵) برای K_1 میدهد کم کرد .

مثال (ط I) بهمان طریق این بار با حذف خطاها درشکل (ك I) و (ك II) حل شده است (مقدار u برای هرگره حساب درکنار گره درشکل ك I نوشته شده است) .

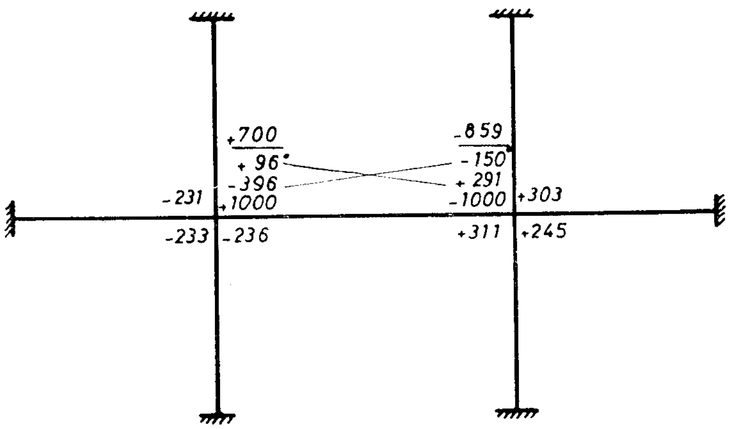
درآباك شكل (ى) ملاحظه ميشود كه منحنى‌ها نزديك به خط مستقيم باضريب زاويه‌ى $\frac{1-b_1}{\delta_m}$ (δ_m خطاى حداكثر براى مقدار b_1) مى‌باشند . پس با دقتى كافى ميتوان منحنى‌ها را خطهائى باضرايب زاويه‌ى $\frac{1-b_1}{\delta_m}$ دانست . با اين فرض ميزان خطا معادل است با :



(شكل ط V)

$$\delta = \frac{\delta_n}{1-b_1} \cdot u \qquad (10)$$

ميزان δ_m برحسب مقادير b_1 درآباك شكل (و) و همچنين درآباك شكل(ى) (بطور نقطه چنين) مشخص شده‌است .

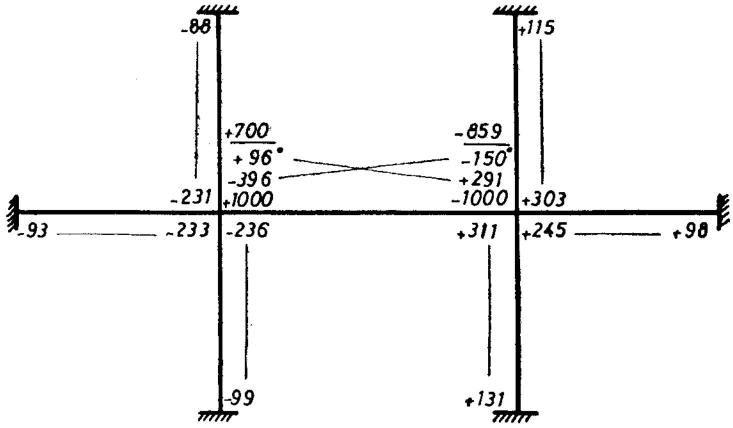


(شكل ط VI)

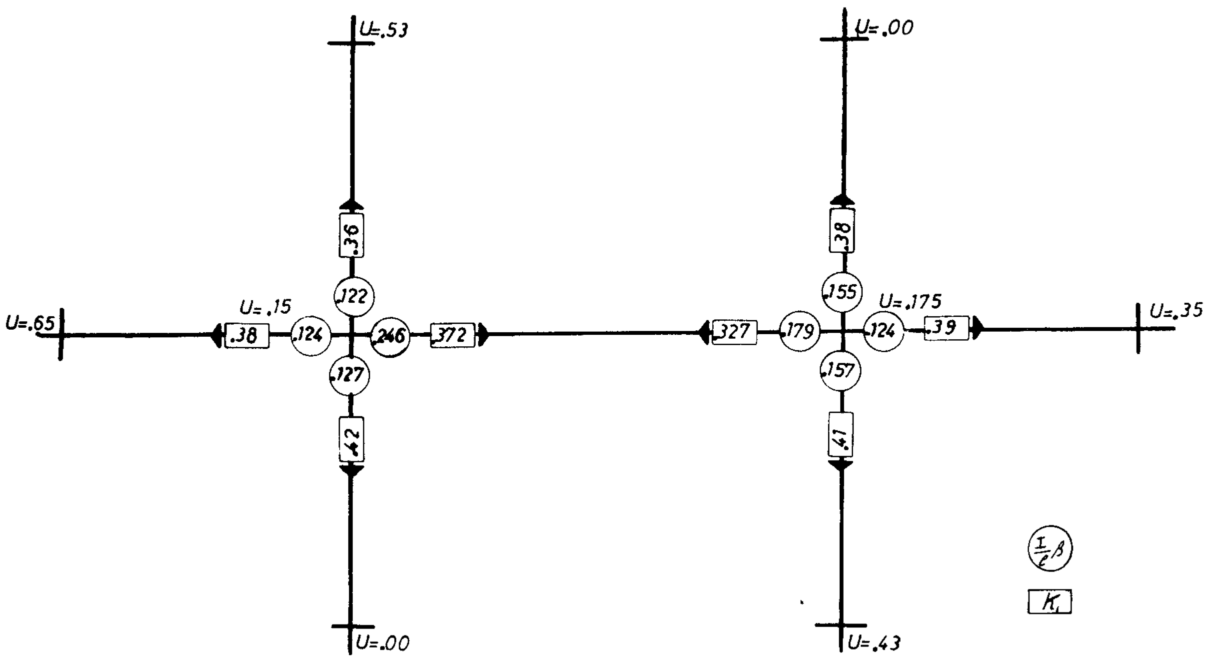
بعنوان مثال درحاليكه ۴ر۰ = b_1 ، ۲۵ر۰ = u باشد ميزان δ_m از روى آباك (و) معادل ۳ر۳٪ = δ_m وبنابراين خطا بكمك رابطه‌ى (۱۰) معادل :

$$\delta = \frac{\text{۳ر۳٪}}{\text{۶ر۰}} \times \text{۲۵ر۰} = \text{۱ر۳۸٪}$$

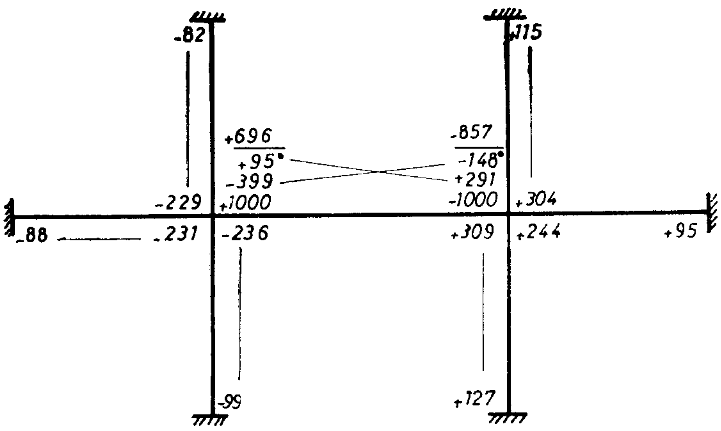
درحاليكه آباك (ى) ميزان اين خطا را ۲۰ر۱٪ نشان ميدهد .



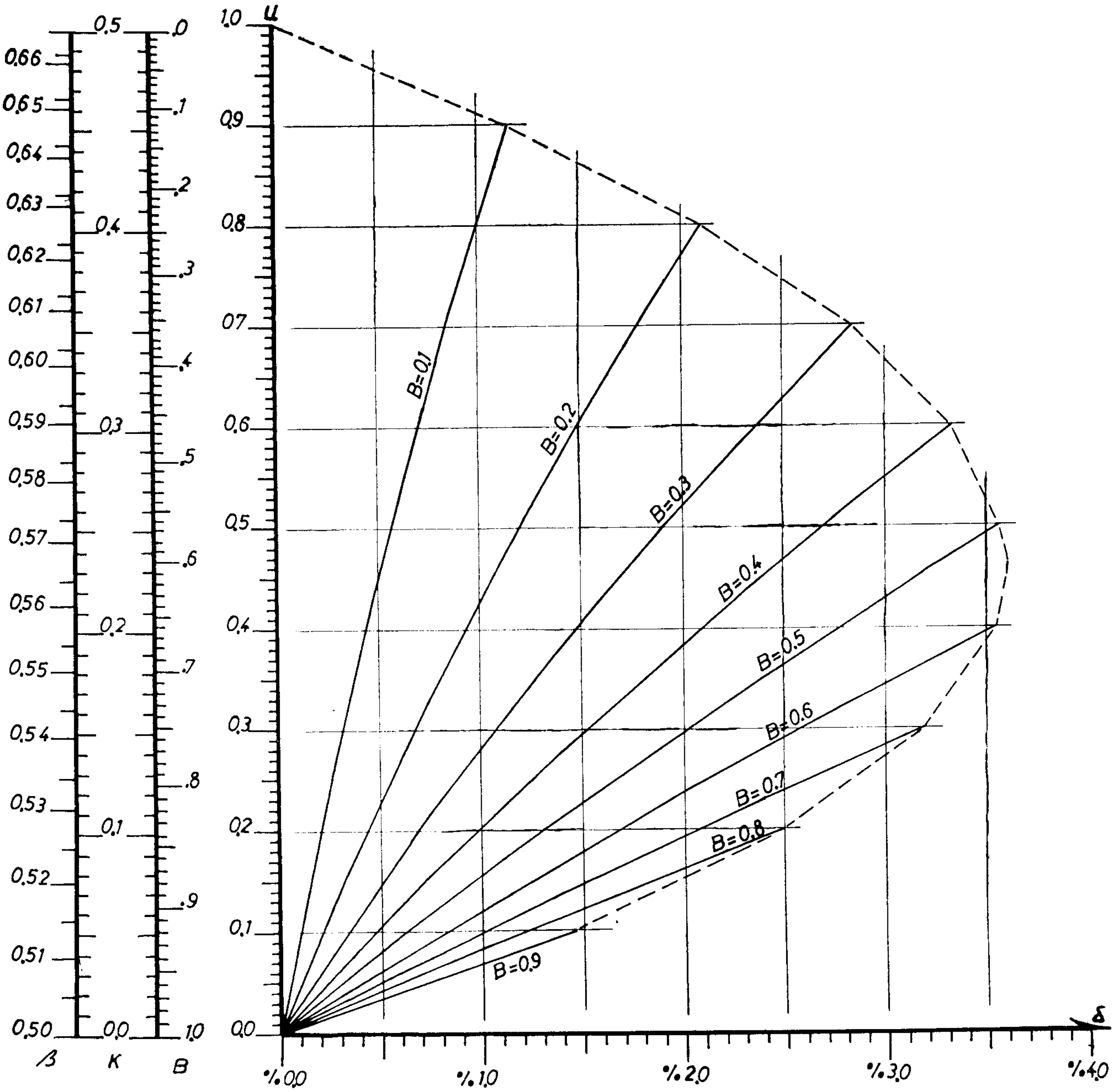
(شكل ط VII)



(شكل ك I)



(شكل ك II)



(شکل ی)

Eng. Jamshid Hassibi