درباب: مقادیر خاص وزاویهٔ دوران

نوشته‌ی:

دکتر علیرضا امیرمعز

استاد دانشکده‌ی فنی دانشگاه تکزاس

منظور ما از این مختصر، مطالعهٔ روابط مابین مقادیر خاص وزاویهٔ دوران درفضاهای دوبعدی وسه بعدی است.

۱ـ قراردادها ـ بردارها باحروف یونانی وحاصلضرب داخلی دوبردار α و β با (α , β) وطول بردار α با $\|\alpha\| = (\alpha , \beta)^{\frac{1}{2}}$ نشانداده خواهدشد. درتمام اینمقاله ازقراردادهای جبربرداری استفاده خواهیم کرد[۱].

۲ـ دریک فضای دوبعدی ـ میدانیم که ماتریس یک دوران به‌زاویهٔ θ ، دریک فضای دو بعدی بصورت زیراست:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

میتوان ثابت کرد که مقادیر خاص این تبدیل:

$$\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{و} \quad \lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta$$

میباشد[۲]. پس روابط مابین زاویهٔ دوران ومقادیر خاص درفضای دوبعدی معلوم شد.

۳ـ دوران در فضای سه بعدی ـ برای مطالعهٔ مقادیر خاص یک دوران در فضای سه بعدی ابتدا باید ماتریس این دوران را بدست‌آورد. فرض میکنیم که θ زاویهٔ دوران و بردار $\gamma = (a,b,c)$ و $\|\gamma\| = 1$

۱- A.R. Amir-Moéz, Matrix Techniques, Trigonometry & Analytic Géometry, Edwards Brothers inc., Ann Arbor, Michigan, 1964, PP. 151-158.

۲- میدانیم که λ_1 و λ_2 مقادیر خاص چنین ماتریسی ریشه‌های معادلهٔ $\begin{vmatrix} \lambda - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \lambda - \cos\theta \end{vmatrix} = 0$ ویا $(\lambda - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 0$ می‌باشد.

برداری واقع برروی محور دوران باشد. هربرداری مانند ξ را میتوانیم بصورت $\xi=\eta+\zeta$ بنویسیم که در آن $\eta=(\xi\,،\,\gamma)\gamma$ است. لذا داریم $\zeta=\xi-\eta$.

اگر A دوران مفروض باشد داریم $A\xi=\eta+A\zeta$

اگر $\delta=A\zeta$ فرض شود ملاحظه میکنیم که روابط زیر برقرار است:

$$\begin{cases}(\delta\,,\,\gamma)=0\\(\delta\,,\,\zeta)=\|\zeta\|^{2}\cos\theta\\\|\zeta\|=\|\delta\|\end{cases}\tag{1}$$

اگر $\xi=(1,0,0)$ یا $\xi=(0,1,0)$ ویا $\xi=(0,0,1)$ باشد ماتریس A از روی:

$$\left\{(1,0,0)\ \text{و}\ (0,1,0)\ \text{و}\ (0,0,1)\right\}$$

بدست میآید. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix}a^{2}+(1-a^{2})\cos\theta & ab(1-\cos\theta)+c\sin\theta & ac(1-\cos\theta)-b\sin\theta\\ ba(1-\cos\theta)+c\sin\theta & b^{2}+(1-b^{2})\cos\theta & bc(1-\cos\theta)+a\sin\theta\\ ca(1-\cos\theta)+b\sin\theta & cb(1-\cos\theta)-a\sin\theta & c^{2}+(1-c^{2})\cos\theta\end{pmatrix}$$

۴ـ مقادیر خاص A ـ ملاحظه میکنیم که یکی ازمقادیر خاص A برابر ۱ وداریم:

$$\det A=1 \quad \text{و} \quad \text{اثر}^{(1)}A=1+2\cos\theta$$

اگر ریشه های معادلهٔ مشخصه[2] λ_1 و λ_2 و λ_3 باشد داریم:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+2\cos\theta \quad \text{و} \quad \lambda_2\lambda_3=1 \quad \text{و} \quad \lambda_1=1$$

لذا معادلهٔ مشخصه خواهد شد:

$$(\lambda-1)(\lambda^{2}-2\lambda\cos\theta+1)=0$$

ازاینمعادله ریشه های مختلف مقادیرخاص A بدست میآید که همان $\cos\theta+i\sin\theta$ و $\cos\theta-i\sin\theta$ خواهدبود.

۱- Trace

۲- Caracteristique