مطالعهٔ پلهای معلق از نظر استاتیک، دینامیک و آئرودینامیک

نوشتهٔ

دکتر مهندس محمد حسین کاشانی ثابت

معلم دانشکدهٔ فنی ورئیس موسسهٔ مهندسی راه وساختمان دانشکدهٔ صنعتی

قسمت سوم ـ ارتعاشات پلهای معلق

اثر نیروهای استاتیک درپلهای معلق درقسمت اول وکلیاتی چند راجع بارتعاشها در قسمت دوم این مقاله بررسی گردید، اینک ارتعاشات پلهای معلق را دراین قسمت مورد بحث قرار میدهیم.

اقسام ارتعاشات پلهای معلق ـ طرز طبیعی[1] ارتعاش های یک پل معلق ممکن است بقائم وپیچشی طبقه‌بندی گردد. در طرز ارتعاش قائم مطلق تمام نقاط واقع دریک مقطع مفروض بطور قائم، بیک مقدار ودر فاز حرکت میکند واساساً دارای ارتعاش دورانی نمیباشد. دامنهٔ این حرکت قائم درطول محور پل برحسب یک تابع سینوسی تغییریافته میباشد. در طرز ارتعاش پیچشی خالص (حرکت پیچشی تنها) هرمقطع درحول محوری که موازی با محور طولی پل میباشد دوران میکند واین محور درهمان سطح قائمی که محور سواره روی پل واقع است قراردارد. نقاط متقابل که در دو طرف خط محور سواره‌رو واقع میباشد بیک مقدار ولی درجهت‌های متضاد حرکت میکند. برای دامنه های پیچشی اندك حرکت هرنقطه اساساً قائم میباشد وشکل موج یا تغییرات دامنه درطول خطی موازی باخط محور طولی پل هممانند یک حرکت قائم خالص میباشد.

هریک از دو طرز ارتعاش قائم وپیچشی میتواند بنوسان قرینه[2] و غیرقرینه[3] طبقه بندی گردد. در ارتعاش قرینه شکل موج قرینه نسبت بخط محور دهانه میباشد یعنی نقاط واقع درطول یک خط موازی با محور طولی پل که بفاصلهٔ مساوی از طرفین محور دهانه واقع باشد بیک اندازه ودریک جهة تغییر مکان میدهد. ازطرف دیگر درطرز ارتعاش غیرقرینه، نقاط واقع درطول چنین خطی که بفواصل مساوی ازطرفین محور دهانهٔ پل قرار داشته باشد بیک مقدار ولی درجهة های متضاد تغییرمکان میکند، بدینمعنی که اگریکی ازآندو نقطه درحین حرکت پائین آید آن نقطهٔ دیگربالا میرود.

---

1) Natural Mode 2) Symmetric 3) Asymmetric

هردو طرز ارتعاش قائم وپیچشی اعم از قرینه یا غیرقرینه ممکن است اشکال مختلفی داشته باشد. ساده‌ترین ارتعاش قرینه نام ارتعاش اساسی(1) داده میشود که دارای یک موج فقط برای تمام دهانه میباشد وهیچ نقطه‌ای از دهانه واقع میان تکیه گاهها بی‌حرکت(2) باقی نمیماند. ساده‌ترین ارتعاش غیرقرینه دارای دوموج مساوی ومتضاد میباشد آنچنانکه وسط دهانه یک نقطهٔ گرهی(3) یا سکون میباشد و در زمان ارتعاش بی‌حرکت باقی میماند.

شکل (۱) یک پل معلق را نشان میدهد که درآن:

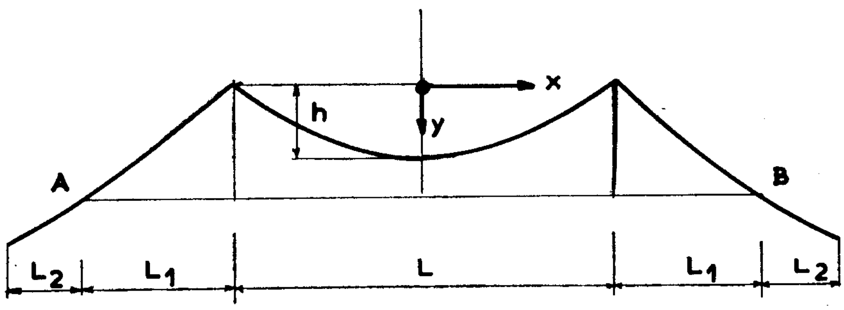
L= درازای دهانهٔ وسطی یا بُرد طناب

L_1= درازای دهانهٔ کناری

L_2= فاصلهٔ افقی میان انتهای طناب معلق تا مهار یالنگر

h= گود افتادگی طناب

میباشد.



شکل « 1 »

شکلهای (۲ و ۳) بترتیب برخی ارتعاش‌های قرینه وغیرقرینه را نشان میدهد.

برای بدست آوردن اشکال این ارتعاش‌ها وتعیین فرکانسها لازم است که معادلات حرکت پل تدوین گردد. در اشتقاق فرمولها معمولاً فرضیه‌های چندی را از پیش قبول میکنند. در زیر این فرضیه‌ها ذکر میگردد:

۱- از مؤلفهٔ افقی کشش اضافی طناب براثر بارزنده یا نیروی ماند درمحاسبات صرفنظر میگردد.

۲- افزایش طول طناب(4) نادیده گرفته میشود.

۳- آویزهای(5) پل را غیرقابل کشش در نظر میگیرند و بالنتیجه از افزایش طول آن‌ها صرفنظر میکنند.

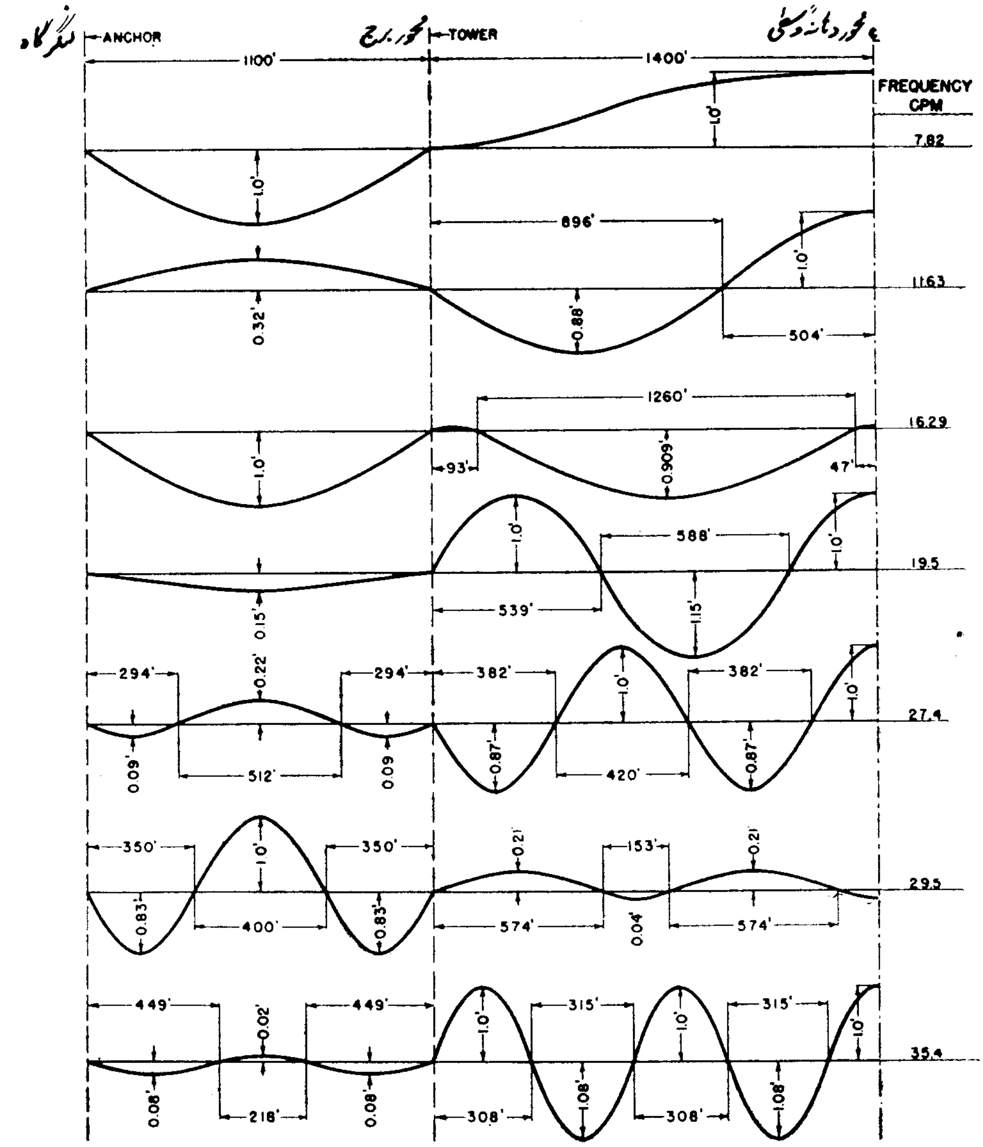
۴- برجها کاملاً قابل انعطاف درمقابل نیروهای افقی‌ایکه برأس آنها وارد شود میباشد.

۵- از تغییر شکل قسمتهای معلق پل درمقابل لنگرخمشی صرفنظر میشود.

---

1) Fundamental Mode 2) Stationary 3) Nodal Point

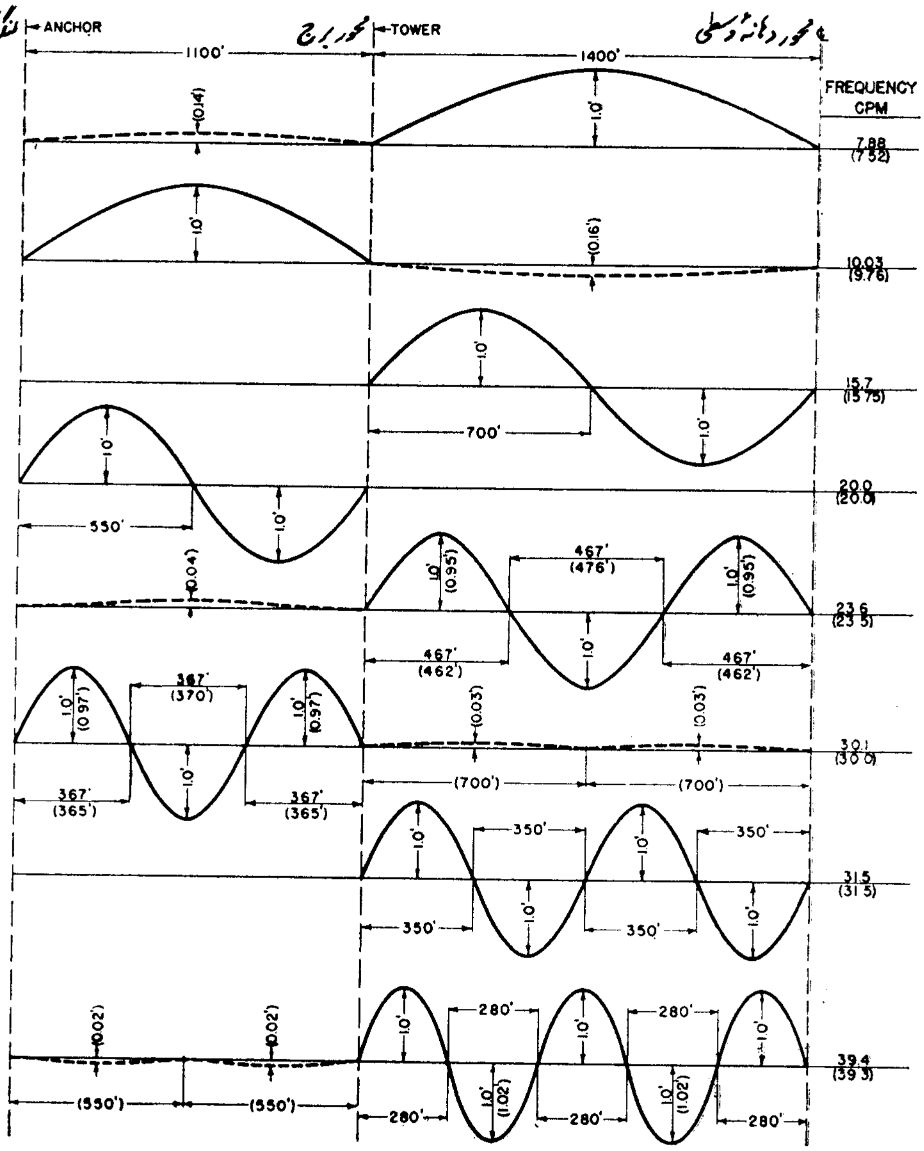
4) Extension 5) Suspenders



SYMMETRIC MODES

شکل2– ارتعاشات قرینه ـ نقل از مأخذ شمارهٔ یازدهم

فرضیه های اول ودوم متضمن آنست که کشش اضافی‌ای بعلت عاملهای ذکر شده میبایستی درنظر گرفته میشد لکن چون مقدار آن اندك میباشد و کشیدگی قابل اغماض را درطناب باعث میشود لذادرمقابل آسان کردن محاسبات ازآن چشم‌پوشی میگردد. فرضیهٔ سوم عادی ومتعارف ومبیّن این‌معنی است که‌طناب وقسمتهای آویخته بدان‌دارای‌تغییرمکان قائم‌یکسان میباشد. فرضیهٔ چهارم درپلهای معلق متداول میباشد ومرادف آنست که‌بگوئیم عکس‌العمل افقی طناب برروی برجها وبالنتیجه‌مؤلفهٔ افقی کشش طنابها دردهانهٔ اصلی‌ودهانهٔ کناری‌مساوی‌میباشد. میزان خطای‌ناشی‌ازفرضیهٔ پنجم درمورد پل نخستین Tacoma Narrows اندك میباشد ولی درمورد پلهائیکه شاه تیرها یا خرپاهای‌آنها ازمصالحی ساخته شده‌باشد که دارای‌صلبیت وشقی بیشتری باشد مجاز نمیباشد.



ASYMMETRIC MODES

شکل3– ارتعاشات غیرقرینه ـ نقل ازمأخذ شمارهٔ یازدهم

طرزبدست‌آوردن معادلات حرکت ـ اگر مختصات نقطه‌ای ازطناب را که فقط تحت تأثیربارمرده قرار داشته باشد به x و y ونیروی مؤثربرطناب را دراین نقطه که زاویهٔ θ با افق تشکیل میدهد به T بنمائیم وآنرا در امتدادهای افقی وقائم تجزیه کنیم، بشرحیکه سابقاً دیدیم خواهیم‌داشت:

$$\text{مقداری ثابت} = H_W = T\cos\theta$$

$$Wx = T\sin\theta$$

دراین‌معادلات W عبارت است ازبارمرده درواحد طول‌افقی دهانهٔ وسطی برحسب کیلوگرم برمتر که مقداری ثابت فرض میگردد.

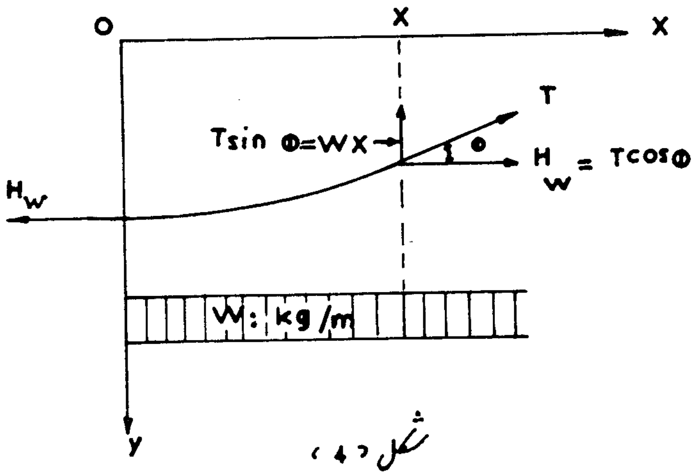
با حذف T میان دو معادلهٔ بالا وتوجه بشکل (٤) که:

$$-\frac{dy}{dx}=\tan\theta$$

میباشد میتوان نتیجه گرفت:

$$-H_w\frac{dy}{dx}=Wx$$

پس ازمشتق گرفتن ازاینمعادله برحسب x بدست میآید:



شکل (٤)

$$-W=H_w\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (1)$$

طرف راست معادلهٔ (١) تغییر مؤلفهٔ قائم کشش طناب را درواحد طول بیان میکند واین معادله مبیّن آنست که اینمقدار مساوی ومختلف العلامه با بار مرده درواحد طول میباشد. رابطهٔ میان H_w و W و بُردطناب وافتادگی آن بوسیلهٔ معادلهٔ (١٠) درقسمت اول اینمقاله داده شده که بصورت زیرنوشته میشود:

$$\frac{Wl^2}{8h}=H_w$$

اگر یک بار زنده یا نیروی ماند ناشی ازحرکت بشدت p در واحد طول افقی برطناب وارد باشد تغییر مکان اضافی y' را سبب میشود ونیز براثر این نیرو یک کشش اضافی درطناب بوجود میآید که مؤلفهٔ افقی آن H ومقداراً اندك میباشد. دراینصورت بجای معادلهٔ (١) رابطهٔ زیر بدست میآید:

$$-(W+p)=(H_w+H)\frac{d^2}{dx^2}(y+y')$$

که درحقیقت مثل آنست که در رابطهٔ (١) بجای W ، H_w , y بترتیب (W+p) ، (H_w+H) و $(y+y')$ گذارده شده باشد[1]. اینمعادله راکه جانشین معادلهٔ (١) میباشد بصورت زیرمیتوان نوشت:

---

١) این بیان بمبنای این فرض است که تغییرمکانهای ناشی ازبار مرده وزنده یا نیروی ماند ارتجاعی است که دراین صورت قاعدهٔ اجتماع اثر قوا (یا The law of Superposition) را میتوان بکاربست.

$$(2) \qquad -W-p=(H_w+H)\left(\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2y'}{dx^2}\right)$$

با حذف‌جملهٔ $H\frac{d^2y'}{dx^2}$ که حاصلضرب دوعدد بالنسبه جزئی وبالنتیجه قابل اغماض درمعادلهٔ (۲) میباشد، اینمعادله پس از رعایت معادلهٔ (۱) درآن بشرح زیرخواهد بود:

$$(3) \qquad \frac{H}{H_w}W=H_w\frac{d^2y'}{dx^2}+p$$

درحالت ارتعاشات ماندگار بار زندهٔ مؤثر که ازحرکت تودهٔ مرتعش ناشی میشود عبارت از همان نیروی ماند میباشد. درصورتیکه جسم دارای تغییرمکانی ازفوق به‌تحت یا مثبت باشد، اثر یک شتاب منفی باعث تأخیر درحرکت آن گردیده ومستلزم آنست که یک نیروی از تحت بفوق برتودهٔ مرتعش مؤثر باشد. نتیجهٔ این عمل آنست که برطناب نیروئی از فوق به‌تحت یعنی درجهت مثبت‌واردآید. اگر فرض کنیم که تغییرمکان در نقطهٔ بطول x در زمان t بوسیلهٔ:

$$\eta(x)\sin\omega t=y'(x \text{ و } t)$$

بیان گردد که‌درآن $\eta(x)$ عبارت‌ازدامنهٔ‌نوسان‌درنقطهٔ x و ω عبارت‌ازفرکانس‌دورانی[1] باشد، شتاب برابربا:

$$-\omega^2\eta(x)\sin\omega t=\frac{d^2y'}{dt^2}$$

است وخواهیم داشت:

$$(4) \qquad \frac{W}{g}\omega^2\eta(x)\sin\omega t=-\frac{W}{g}\frac{d^2y'}{dt^2}=p$$

چون $\frac{d^2y'}{dt^2}$ و p [بمعادلهٔ (٤) توجه شود] عبارت $\sin\omega t$ را در فاکتور دارد پس H نیز بایستی دارای این عامل مشترک باشد یعنی:

$$(5) \qquad H=H_o\sin\omega t$$

که‌درآن H_o عبارت‌ازماکزیمم‌مقدار H درحین‌ارتعاش‌میباشد. اگررابطه‌های (٤ و٥) وعبارت $\frac{d^2y'}{dt^2}$ را برحسب η و $\sin\omega t$ درمعادلهٔ (۳) قرار داده وآنرا ساده کنیم خواهیم داشت:

$$(6) \qquad \frac{d^2\eta}{dx^2}+\frac{W}{H_wg}\omega^2\eta=\frac{H_o}{H_w{}^2}W$$

حال اگر بجای ω یک عدد بی‌بعدی مانند μ بشرح زیر اختیار کنیم:

$$\mu=\sqrt{\frac{W}{H_wg}}\cdot\frac{l}{2}\omega=\sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\omega$$

Circular Frequency (1

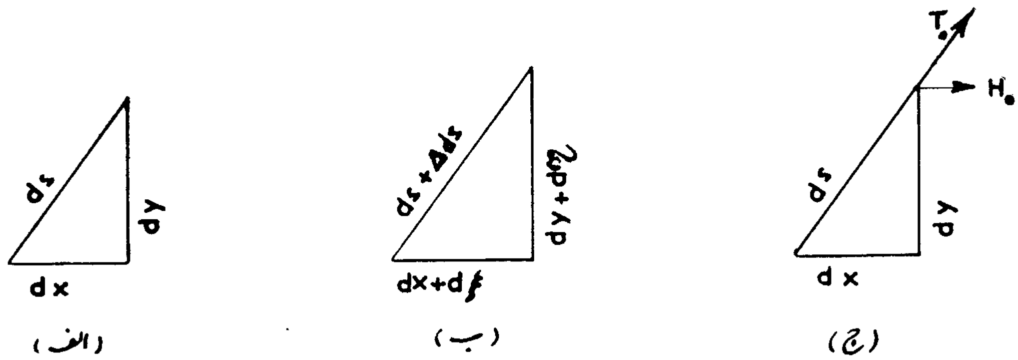
معادلهٔ فاصلهٔ (۶) چنین نوشته میشود:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}+\left(\frac{2\mu}{l}\right)^2\eta=\frac{8h}{l^2}\cdot\frac{H_0}{H_w} \tag{۷}$$

شرط کش‌نیآمدگی[1] طناب- عنصر طول‌طناب در وضع استاتیکی بطوریکه‌سابقاً گفتیم‌عبارتست‌از:

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=ds$$

وقتیکه طناب مرتعش شده و بحد اکثر دامنهٔ خود برسد در آن اضافه طولی معادل Δds حاصل میشود. عنصر طول طناب، dx و dy بترتیب برابر $ds+\Delta ds$ ، $dx+d\xi$ و $dy+d\eta$ خواهد شد که درآن ξ و η بترتیب عبارت از تغییر مکان افقی و قائم ناشی از ارتعاش عنصر مزبور میباشد. از شکل زیر واضح است که :



شکل (5)

$$(ds+\Delta ds)^2=(dx+d\xi)^2+(dy+d\eta)^2$$

یا :

$$ds^2+2ds\Delta ds+(\Delta ds)^2=dx^2+2dxd\xi+d\xi^2+dy^2+2dyd\eta+d\eta^2$$

با حذف مجذورهای مقادیر کوچک ازمرتبهٔ دوم وساده کردن خواهیم داشت:

$$ds\Delta ds=dxd\xi+dyd\eta$$

یا :

$$d\xi=\frac{ds}{dx}\,\Delta ds-\frac{dy}{dx}d\eta \tag{a}$$

اگر ازتغییر مختصر زاویهٔ طناب که از بار زنده ناشی‌میشود صرفنظر گردد، Δds عبارت ازافزایش طول‌عنصر طناب میباشد که از افزایش نیروی کششی بمقدار :

$$H_0\frac{ds}{dx}=T_0$$

---

1) Inextensibility

[بشکل (ه الف و ج) مراجعه شود] حاصل شده است. این نیرو که برعنصر طول :

$$\frac{ds}{dx}\,dx=ds$$

بمقطع A_c وضریب ارتجاعی E_c اثرمیکند، افزایش طول عنصر طناب را باندازهٔ $\triangle ds$ باعث میشود که بعبارت زیر میباشد:

$$\triangle ds=H_o\left(\frac{ds}{dx}\right)\frac{1}{A_cE_c}\cdot\frac{ds}{dx}\cdot dx$$

یا :

$$\triangle ds=\frac{H_o}{A_cE_c}\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 dx$$

که ازقانون هوك نتیجه شده است.

با اینمقدمه معادلهٔ (a) را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$d\xi=\frac{H_o}{A_cE_c}\left(\frac{ds}{dx}\right)^2\frac{ds}{dx}dx-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\eta}{dx}dx$$

پس از انجام انتگراسیون وبا توجه بشکل (۱) خواهیم داشت:

$$\text{(b)}\qquad \int_{-\frac{l}{2}-l_1}^{\frac{l}{2}+l_1}d\xi=\frac{H_o}{A_cE_c}\int_{-\frac{l}{2}-l_1}^{\frac{l}{2}+l_1}\left(\frac{ds}{dx}\right)^3dx-\int_{-\frac{l}{2}-l_1}^{\frac{l}{2}+l_1}\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\eta}{dx}dx$$

درانتهای طنابها $\xi=o$ است [نقاط A و B شکل (۱) بی‌حرکت میباشد].

پس طرف چپ معادلهٔ (b) صفر میشود بنابراین لازم میآید که طرف راست معادلهٔ مزبور هم صفر گردد. با انتگراسیون جزء بجزء جملهٔ آخری معادلهٔ (b)، اینمعادله بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\text{(c)}\qquad \frac{H_o}{A_cE_c}\int_{-\frac{l}{2}-l_1}^{\frac{l}{2}+l_1}\left(\frac{ds}{dx}\right)^3dx=\left[\eta\frac{dy}{dx}\right]_{-\frac{l}{2}-l_1}^{\frac{l}{2}+l_1}-\int_{-\frac{l}{2}-l_1}^{\frac{l}{2}+l_1}\eta\frac{d^2y}{dx^2}dx$$

ازآنجائیکه انتهای طنابها مهار شده است یعنی نقاط $x=\pm\left(\frac{l}{2}+l_1\right)$ نباید تغییرمکان η داشته باشد لذا در این نقاط $\eta=o$ وجملهٔ اول طرف راست معادلهٔ (c) صفر میگردد. با استفاده از رابطهٔ:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{W}{H_w}=-\frac{8h}{l^2}$$

معادلهٔ (c) بشکل زیر نوشته میشود:

$$(\text{٨}) \qquad \frac{H_\circ}{A_c E_c}\int_{-\frac{l}{2}-l_1}^{\frac{l}{2}+l_1}\left(\frac{ds}{dx}\right)^{2}dx=\frac{8h}{l^2}\int_{-\frac{l}{2}-l_1}^{\frac{l}{2}+l_1}\eta dx$$

شرط کشش نیامدگی طناب (فرضیهٔ شمارهٔ ۲) بطور ساده دارای این معنی است که Δds در معادلهٔ (a) صفر است وبنابراین طرف‌چپ معادلهٔ (a) صفرمیباشد؛ هم‌چنین طرف چپ معادلهٔ (۸) نیز صفرمیگردد (زیراعامل انتگرال صفر است). بالنتیجه معادلهٔ (۸) بصورت زیر نوشته میگردد:

$$(\text{٩}) \qquad \int_{-\frac{l}{2}-l_1}^{\frac{l}{2}+l_1}\eta dx=0$$

بعبارت دیگر میتوان گفت که شرط ثابت ماندگی طول طناب لازم میآورد که جمع جبری سطح میان منحنی تغییرمکان و خط تعادل استاتیکی صفر باشد. نتیجهٔ فوق را بطریقهٔ اصل تغییر مکانهای مجازی هم میتوان بدست آورد.

ارتعاشات متقارن ـ از آنجائیکه انتهای طنابها در نقاط $x=(\frac{l}{2}+l_1)\pm$ مهار شده است ونیزطناب هیچگونه تغییر مکان قائم در نقاط $x=\pm\frac{l}{2}$ نداردبنابراین ارتعاشات‌متقارن‌جوابهای‌معادلهٔ (۷) خواهدبود.

عبارت دامنهٔ ارتعاش متقارن باید طوری باشد که در فاصلهٔ $0<x<\frac{l}{2}$ در شرایط حدی زیر صدق کند:

بازای $x=0$ $\qquad$ بجهت تقارن $\frac{d\eta}{dx}=0$

بازای $x=\frac{l}{2}$ $\qquad$ $\eta=0$

و نیزعبارت دیگری که مبیّن دامنهٔ حرکت در فاصلهٔ $\frac{l}{2}<x<\frac{l}{2}+l_1$ باشد درشرایط حدی زیرصدق کند:

بازای $x=\frac{l}{2}$ $\qquad$ $\eta=0$

بازای $x=\frac{l}{2}+l_1$ $\qquad$ $\eta=0$

بجهة فرضیه‌هائی که بدواً کردیم مقادیر $H_\circ$ و μ در دهانه‌های وسطی و کناری یکسان خواهد بود.

معادلهٔ فاضلهٔ (۷) یک معادلهٔ خطی ناهمگن با ضرایب ثابت از رستهٔ دوم میباشد که جواب آن چنین است:

$$\eta=C_1 \cos\frac{2\mu x}{l}+C_2 \sin\frac{2\mu x}{l}+\frac{2hH_0}{H_w\mu^2} \qquad (۱۰)$$

برای محاسبهٔ ثابتهای انتگراسیون از شرایط حدی استفاده میکنیم بدینمعنی که برای دهانهٔ وسطی بشرح فوق خواهیم داشت:

$$\frac{d\eta}{dx}=0=-C_1\frac{2\mu}{l}\sin(0)+C_2\frac{2\mu}{l}\cos(0)$$

ازاینمعادله نتیجه میشود که $C_2=0$ میباشد. با این ترتیب معادلهٔ (۱۰) بصورت زیر نوشته میشود:

$$\eta=C_1 \cos\frac{2\mu x}{l}+\frac{2hH_0}{H_w\mu^2}$$

با بکار بردن شرط حدی دوم همین دهانه خواهیم داشت:

$$\eta=0=C_1 \cos\frac{2\mu}{l}\left(\frac{l}{2}\right)+\frac{2hH_0}{H_w\mu^2}$$

ازآنجا :

$$C_1=-\frac{2hH_0}{H_w\mu^2}\cdot\frac{1}{\cos\mu}$$

عبارت η درفاصلهٔمیان $x=0$ و $x=\frac{l}{2}$ بشرح زیر میباشد:

$$\eta=\frac{2hH_0}{H_w\mu^2}\left[1-\frac{\cos\left(\frac{2\mu x}{l}\right)}{\cos\mu}\right] \qquad 0<x<\frac{l}{2} \qquad (۱۱ الف)$$

درمورد دهانهٔ کناری، با بکار بردن شرط حدی اول در عبارت (۱۰) خواهیم داشت:

$$\eta=0=C_1\cos\mu+C_2\sin\mu+\frac{2hH_0}{H_w\mu^2}$$

با رعایت شرط حدی دوم معادلهٔ زیرنتیجه میشود:

$$\eta=0=C_1\cos(\mu+2\alpha\mu)+C_2\sin(\mu+2\alpha\mu)+\frac{2hH_0}{H_w\mu^2}$$

که درآن :

$$\alpha=\frac{l_1}{l}$$

میباشد.

ازحل دو معادلهٔ اخیر نتیجه میشود:

$$C_1=-\frac{2hH_0}{H_w\mu^2}\cdot\frac{\cos(1+\alpha)\mu}{\cos\alpha\mu}$$

$$C_2=-\frac{2hH_0}{H_w\mu^2}\cdot\frac{\sin(1+\alpha)\mu}{\cos\alpha\mu}$$

با جانشین کردن مقادیر C_1 و C_2 از ایندو معادله در عبارت کلی (۱۰)، η بصورت زیر نوشته میشود:

$$\eta = -\frac{2hH_0}{H_w\mu^2}\cdot\frac{\cos\mu(1+\alpha)}{\cos\alpha\mu}\cos 2\mu\frac{x}{l} - \frac{2hH_0}{H_w\mu^2}\cdot\frac{\sin\mu(1+\alpha)}{\cos\alpha\mu}\sin 2\mu\frac{x}{l} + \frac{2hH_0}{H_w\mu^2}$$

یا :

$$\eta = \frac{2hH_0}{H_w\mu^2}\left(1 - \frac{\cos\mu(1+\alpha-2x/l)}{\cos\alpha\mu}\right) \qquad \frac{l}{2}<x<\frac{l}{2}+l_1 \qquad (۱۱\ ب)$$

اگر محور مختصات در دهانهٔ کناری بمرکز آن انتقال یابد بطوریکه x_1 طول جدید آن باشد مقدار آن برابر $x-\left(\frac{l}{2}+\alpha\frac{l}{2}\right)$ و x مختصات قبلی تبدیل به $x_1+\frac{l}{2}+\alpha\frac{l}{2}$ خواهد شد. چنین انتقال محورهای مختصات عبارت سهلتری را بشرح زیر نتیجه میدهد یعنی:

$$\eta = \frac{2hH_0}{H_w\mu^2}\left(1 - \frac{\cos(2\mu x_1/l)}{\cos\alpha\mu}\right) \qquad 0<x_1<\alpha l/2 \qquad (۱۲)$$

شرط کش نیامدگی طناب رابطه‌ای میدهد که بکمک آن میتوان μ را مشخص کرد. معادلهٔ (۹) را در مورد ارتعاشات متقارن بصورت زیر میتوان نوشت:

$$\int_0^{\frac{l}{2}+l_1}\eta dx = 0 = \int_0^{\frac{l}{2}}\eta dx + 2\int_0^{\frac{\alpha l}{2}}\eta dx$$

با استفاده ازمعادلات (۱۱ الف و ۱۲) و انجام انتگراسیون بالا برای دهانه‌های وسطی و کناری بشرح زیر:

دهانهٔ وسطی

$$\int_0^{\frac{l}{2}}\eta dx = \frac{2hH_0}{H_w\mu^2}\int_0^{\frac{l}{2}}\left(1-\frac{\cos 2\mu x/l}{\cos\mu}\right)dx = \frac{2hH_0}{H\mu_w^2}\left(x-\frac{l}{2\mu}\,\frac{\sin 2\mu x/l}{\cos\mu}\right)_0^{\frac{l}{2}}$$

$$= \frac{2hH_0}{H_w\mu^2}\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{2\mu}\,\frac{\sin\mu}{\cos\mu}\right) = \frac{hH_0 l}{H_w\mu^3}(\mu-\tan\mu)$$

دهانهٔ کناری

$$2\int_0^{\frac{\alpha l}{2}}\eta dx = \frac{4H_0h}{H_w\mu^2}\int_0^{\frac{\alpha l}{2}}\left(1-\frac{\cos 2\mu x_1/l}{\cos\alpha\mu}\right)dx_1 = \frac{4H_0h}{H_w\mu^2}\left(x_1-\frac{l}{2\mu}\,\frac{\sin 2\mu x_1/l}{\cos\alpha\mu}\right)_0^{\frac{\alpha l}{2}}$$

$$= \frac{4H_0h}{H_w\mu^2}\left(\frac{\alpha l}{2}-\frac{l}{2\mu}\,\frac{\sin\alpha\mu}{\cos\alpha\mu}\right) = \frac{hH_0 l}{H_w\mu^3}(2\alpha\mu-2\tan\alpha\mu)$$

وپس از جمع حاصل انتگرالهای فوق وبرابر قرار دادن آن با صفر نتیجهٔ زیرگرفته میشود:

$$\frac{hH_0 l}{H_w\mu^3}(\mu-\tan\mu+2\alpha\mu-2\tan\alpha\mu)=0$$

درطرزارتعاش‌متقارن جملهٔ خارج از پرانتزها نمیتواند صفر باشد لذا جملهٔداخل پرانتزهابايد صفر گردد یعنی:

$$\tan\mu + 2\tan\alpha\mu = (1+2\alpha)\mu \qquad (13)$$

معادلهٔ (۱۳) دارای تعداد بی‌نهایت ریشه‌های حقیقی μ_1 و μ_2 و ... میباشد که بهریک ازآنها یک فرکانس زاویه‌ای ω و یک نوع طرز ارتعاش [که بوسیلهٔ معادلات (۱۱ الف و ۱۲) بیان میگردد] مربوط میشود. برای حل معادلهٔ فوق مناسب آنست که دوطرف اینمعادله‌را برحسب توابعی از μ رسم وسپس محل‌تلاقی ر قرائت کرد. اگر $\frac{1}{2} > \alpha$ باشد طرف چپ معادلهٔ (۱۳) بازای $\tan\mu=\infty$ یعنی بازای $\mu=\frac{2n+1}{2}\pi$ و هم چنین اگر $\tan\alpha\mu=\infty$ یا $\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{\pi}{\alpha}=\mu$ باشد بی‌نهایت میگردد. نمایش طرف راست معادلهٔ (۱۳) یک خط مستقیم میباشد.

نمونه‌ای ازحل این معادله در مأخذ شمارهٔ دهم این مقاله داده شده‌است.

ارتعاشات غیر متقارن ـ در ارتعاشات غیرمتقارن وسط طناب بایستی درهرنوسان طولاً جلو و عقب برود. دوحالت میتوان درنظر گرفت:

۱ـ از مؤلفه‌های طولی نیروهای‌ماند توده‌ها صرفنظر شود یعنی مثل‌اینکه طناب آزاد است‌تادارای حرکت نسبی نسبت بپل که بطناب‌آویخته شده است‌باشد ونیزدراین حالت ازتأثیرات افقی ماند طناب چشم پوشی میگردد.

۲ـ طناب بوسط پل معلق چنان بسته است که تمام تودهٔ دهانهٔ وسطی طولاً نوسانهای هم فازی با ارتعاشات قائم خواهد داشت. بنابراین دراینحالت دوم کشش طناب H_0 نیز غیرمتقارن خواهد بود که معنای آن اینست که اختلاف مؤلفهٔ افقی کششی در دوطرف محور دهانه برحسب‌مقدار $2H_0$ میباشد که‌باید با نیروی ماند ناشی از حرکت طولی توده برابری کند.

حالت اول ـ ازآنجائیکه از تأثیر نیروی ماند در امتداد طولی صرفنظر شده است کشش اضافی H_0 صفر میباشد. معادلهٔ دیفرانسیل حرکت دراینحالت با گزاردن $H_0=0$ درمعادلهٔ (۷) بصورت زیردرمیآید:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}+\left(\frac{2\mu}{l}\right)^2\eta=0$$

و شرایط حدی $\eta=0$ در $x=0$ ، $x=\pm\frac{l}{2}$ و $x=\pm\left(\frac{l}{2}+l_1\right)$ میباشد. ازآنجائیکه کشش اضافی طناب $(H_0=0)$ است دیگر عمل متقابلی میان دهانهٔ وسطی وکناری وجود نخواهد داشت وارتعاشات قائم دهانهٔ کناری بایستی مستقل ازارتعاشات دهانهٔ وسطی‌باشد. بنابراین در دهانهٔ وسطی‌معادلهٔ ارتعاش‌وفرکانسها بصورت زیرخواهد بود:

$$\begin{cases} \eta=\eta_0\sin\left(2\mu\frac{x}{l}\right) \\ \mu=n\pi \text{ و } n=1,2,3,\dots \end{cases} \qquad (\text{۱۴ الف})$$

ودر دهانهٔ کناری :

$$\begin{cases} \eta=\eta_0 \sin\frac{2\mu}{l}\left(x-\frac{l}{2}\right) \\ \mu=n\frac{\pi}{2\alpha} \quad ,n=1,2,3,\ldots \end{cases} \qquad (۱۴ ب)$$

در معادلات فوق η_0 حداکثر دامنهٔ ارتعاش درهردهانهٔ مورد نظر میباشد. ازآنجائیکه :

$$\eta(-x)=-\eta(x)$$

پس شرط کشش نیآمدگی طناب خود بخود برآورده شده است.

حالت دوم ـ تودهٔ بسته و ثابت شده بمرکز هرطناب عبارتست از $\frac{Wl}{g}$ ، واگردامنهٔ تغییر مکان طولی مرکزدرامتداد x برابر ξ باشد پس نیروی لازمی که بایدبرآن توده اثر کرده وآنرا بافرکانس زاویه‌ای ω بارتعاش درآورد عبارت از $-\frac{Wl}{g}\omega^2\xi$ میباشد. این نیرو بوسیلهٔ تفاوت کشش طناب در دونیمهٔ آن داده شده است؛ یعنی اگر H_0 حداکثر مؤلفهٔ اضافی افقی کشش در قسمتی از طناب که در ناحیهٔ $x>0$ است باشد خواهیم داشت:

$$2H_0=-\frac{Wl}{g}\omega^2\xi=-4H_w\mu^2\xi/l \qquad (۱۵)$$

معادلهٔ فاصلهٔ (۷) بایستی با شرایط حدی

$$\eta=0 \text{ در } x=0 \text{ ، } x=\frac{l}{2} \text{ و } x=\frac{l}{2}+l_1$$

حل شود.

جوابیکه شرایط حدی فوق درآن صدق کند بصورت زیر میباشد:

$$\begin{cases} \eta=2h\frac{H_0}{H_w}\cdot\frac{1}{\mu^2}\left[1-\frac{\cos\mu\left(\frac{1}{2}-2\frac{x}{l}\right)}{\cos\frac{\mu}{2}}\right] & 0<x<\frac{l}{2} \\ \eta=2h\frac{H_0}{H_w}\cdot\frac{1}{\mu^2}\left[1-\frac{\cos\mu\left(1+\alpha-2\frac{x}{l}\right)}{\cos\alpha\mu}\right] & \frac{l}{2}<x<\frac{l}{2}+l_1 \end{cases} \qquad (۱۶ \text{ الف و ب})$$

این عبارات برای مقادیر مثبت x است که بازای آنها H_0 نیز مثبت میباشد. برای مقادیر منفی x ، H_0 منفی و نتیجتاً η منفی است. بنابراین :

$$\eta(-x)=-\eta(x)$$

وشرط کشش نیآمدگی طناب تأمین شده است. بکمک رابطهٔ اضافی (۱۰) میتوان بسآمدها را حساب کرد. اگر مرکز دهانهٔ وسطی درامتداد افقی حرکت کند ولی هیچ کشش‌آمدگی درطناب وجود نداشته‌باشد دراین صورت Δds صفر بوده ومعادلهٔ (a) صفحهٔ ۳۹ بصورت زیر درمیآید:

$$d\xi = -\frac{dy}{dx}d\eta$$

باگزاردن اینمقدار در معادله‌ایکه قبلاً بیان شد وبا اجرای انتگراسیون میان حدود:

$$x=0 \quad \text{و} \quad x=\frac{l}{2}+l_1$$

نتیجه میگردد:

$$\int_0^{\frac{l}{2}+l_1} d\xi = -\frac{8h}{l^2}\int_0^{\frac{l}{2}+l_1} \eta dx$$

وقتیکه $x=0$ باشد ξ مساوی با تغییرمکان افقی مرکز دهانه خواهد بود و بازای $x=\frac{l}{2}+l_1$ مقدار $\xi=0$ میباشد. بنابراین:

$$0-\xi_{max} = -\frac{8h}{l^2}\int_0^{\frac{l}{2}+l_1} \eta dx$$

یا :

$$\xi_{max} = \frac{8h}{l^2}\int_0^{\frac{l}{2}+l_1} \eta dx$$

اگر مقدار η را از روابط (۱۶ الف و ب) گزارده وانتگرال گرفته‌شود و بجای ξ از معادلهٔ (۱۰) استفاده گردد معادلهٔ مشخصهٔ(۱) μ بدست میآید:

$$\tan\frac{\mu}{2}+\tan\alpha\mu = \left(\frac{1}{2}+\alpha+\frac{l^2}{32h^2}\right)\mu \qquad (17)$$

اینمعادله را میتوان برای μ مانند حالت ارتعاشات متقارن حل کرد. ریشه‌ها کمتر ازآن مقادیری از μ است که سمت چپ معادلهٔ بالا را بی‌نهایت میکند یعنی بازای مقادیر:

$$(2n+1)\pi=\mu \quad \text{و} \quad (2n+1)\frac{\pi}{2\alpha}=\mu$$

که درآن $n=0$، ۱، ۲، ۳ و .... باشد.

۱- Transcendental Equation

اضافه براین فرکانسها واینطرز ارتعاشها ، ارتعاش های غیرقرینهٔ دیگری هم ممکن است واقع شود بطوریکه نقطهٔ مرکزی حرکت نکند وبنابراین کشش اضافی طناب صفرباشد؛ لذا این ارتعاشها شبیه بارتعاشهای حالت(۱) است که شرایط زیرین را برآورده میکند:

$$\mu=۲\pi n\begin{cases}\eta=\eta_{0}\,sin\,۲\mu\dfrac{x}{l} & , \quad 0<x<\dfrac{l}{۲}\\[2ex] \eta=0 & , \quad \dfrac{l}{۲}<x<\dfrac{l}{۲}+l_{1}\end{cases}$$

n=۰، ۱، ۲ و ۰۰۰۰

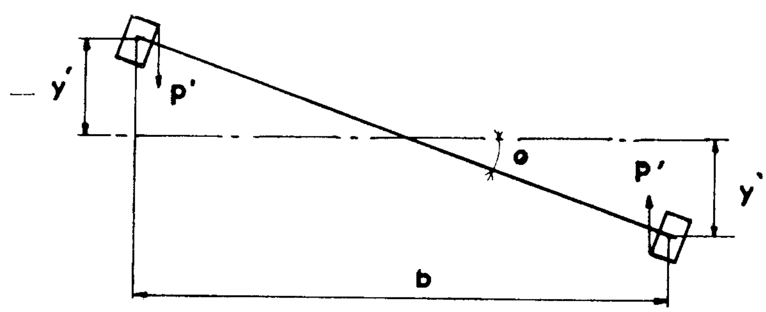
$$\mu=\frac{\pi n}{\alpha}\begin{cases}\eta=\eta_{0}\,sin\,\dfrac{۲\mu}{l}\left(x-\dfrac{l}{۲}\right) & , \quad \dfrac{l}{۲}<x<\dfrac{l}{۲}+l_{1}\\[2ex] \eta=0 & , \quad 0<x<\dfrac{l}{۲}\end{cases}$$

ازاین شرح نتیجه می‌شود که هرشکل ارتعاش نوع دوم حالت اول درحالت دوم نیزواقع میگردد.

توضیح ـ در بررسیهای این قسمت از تأثیر صلبیت شاه تیرها یا خرپا های صلب کننده صرفنظر شده است ولی محاسبات نشان میدهد که تأثیر مقاومت خمشی شاه تیرها اندك بوده ولیکن صلبیت خمشی خرپا ها درتعیین بسآمدها وشکل امواج عامل مشخصی میباشد (بمأخذ دهم اینمقاله رجوع شود).

مطالعهٔ حرکت پیچشی پل‌معلق. پل‌معلقی که دارای‌خرپای صلب کننده[1] وقابلیت حرکت‌دورانی باشد، عوض آنکه کف آن در دو طرف مقطع عرضی دارای شاه تیر با جان پر باشد، دارای دو خرپا میباشد. چنین طرز ساختمانی مقاومت پل را درمقابل ارتعاش پیچشی افزایش میدهد.

تنظیم معادلهٔ حرکت ـ اگر پلی معروض بارتعاش پیچشی اعم از قرینه یا غیرقرینه باشد،



شکل (۵)

هرمقطع پل آنچنان حرکت‌میکند که میان‌تاریک خرپا تغییرمکانی‌باندازهٔ y' خواهد یافت‌درحالتی که میان تار خرپای دیگر تغییر مکان $-y'$ می‌یابد و اختلاف ارتفاع این خرپا ها برابر $۲y'$ خواهد بود [شکل (۶)].

۱- Stiffening Truss

زاویهٔ دوران θ مقطع با مراجعهٔ بشکل (٦) چنین بیان میگردد:

$$\theta = \frac{2y'}{b} \qquad \text{(a)}$$

تغییردرزاویهٔ θ را میتوان بامقاومت پیچشی پل‌معلق‌ولنگرپیچشی‌ایکه درآن القاء شده‌است ربط داد، یعنی:

$$\theta = \frac{Tx}{KG}$$

که درآن x طولی است که برآن T اثر میکند. با مشتق گرفتن اینرابطه برحسب x نتیجه میگردد:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{KG} \qquad \text{(b)}$$

دراین فرمول T عبارتست ازلنگر پیچشی که برنقطهٔ x اثر میکند وفرض می‌شود که مقدار آن در فاصلهٔ dx ثابت باشد و KG عبارتست از صلبیت پیچشی تمام مقطع (فقط دریک مقطع دایره‌ای K عبارت از لنگر ماند قطبی میباشد) و G عبارتست از ضریب ارتجاعی عرضی یا پیچشی.

ازمعادلات (a) و(b) نتیجه میگردد:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{KG} = \frac{2}{b}\ \frac{dy'}{dx}$$

و:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{1}{KG}\ \frac{dT}{dx} = \frac{2}{b}\ \frac{d^2y'}{dx^2} \qquad \text{(c)}$$

تغییر لنگر پیچشی در واحد طول دهانه برابر با $\frac{dT}{dx}$ میباشد که ممکن است بوسیلهٔ دو نیروی p' مساوی و مختلف العلامه‌ایکه بطور قائم در دو خرپای طرفی پل اثر کند نشان داده شود [شکل (٦)]. درحقیقت وقتیکه نیروی افقی وجود نداشته باشد لنگر پیچشی جز بوسیلهٔ اثر این زوج تغییرنمیکند. کمیت p' نیروی این زوج (در واحد طول دهانه) طوریست که $p'b = \frac{dT}{dx}$ و b عرض پل میباشد. این نیروهای p' نمایش دهندهٔ انتقال بار از یکطرف پل بطرف دیگر میباشد. این نیروها مخالف با تغییرمکان‌پل‌میباشد یعنی هرجا که تغییرمکان پل ازفوق به‌تحت باشد آنها ازتحت بفوق عمل میکند وبالعکس.

با مراجعهٔ بشکل (٦) آشکار میگردد که p' میخواهد خرپا را بحال‌تعادل اولیهٔ آن برگرداندپس با y' مخالفت میکند. بار منتقل شده در واحد طول دهانه p' است که با گزاردن مقدار $\frac{dT}{dx}$ برحسب آن درمعادلهٔ (c) نتیجهٔ زیر حاصل میگردد:

$$\frac{1}{KG}\ p'b = \frac{2}{b}\ \frac{d^2y'}{dx^2}$$

یا :

$$p' = \frac{۲KG}{b^۲} \cdot \frac{d^۲y'}{dx^۲} \qquad (۱۸)$$

وقتیکه این نیروی اضافی که مخالف با باراست بطرف چپ معادلهٔ (۲) صفحهٔ (۳۸) اضافه گردد معادلهٔ مزبور بصورت زیر درمیآید:

$$(H_w + H)\left(\frac{d^۲y}{dx^۲} + \frac{d^۲y'}{dx^۲}\right) - EI\frac{d^۴y'}{dx^۴} + \frac{۲KG}{b^۲}\frac{d^۲y'}{dx^۲} = -W - p \qquad (۱۹)$$

دراینحالت p عبارت از نیروی ماند مؤثر پیچشی است که درسطح قائم طناب اثر میکند ومقدار ماکزیمم آن عبارتست از :

$$\frac{W}{g}\omega^۲\eta(۲r/b)^۲$$

برای رسیدن باین نتیجه باید توجه داشت که درنوسان پیچشی اشکال موج و عمل طناب هممانند طرز نوسان قائم نظیر میباشد ولی نیروهای ماند ناشی از حرکت بارمرده در ایندو نوع ارتعاش متفاوت است. در طرز ارتعاشهای قائم تمام بارمرده با دامنهٔ η نوسان میکند. در نوسانهای پیچشی طنابها و خرپاها با دامنهٔ η نوسان میکند ولی قسمتهای نزدیکتر بخط محور سواره رو با دامنهٔ کوچکتری حرکت میکند. میتوان اثبات کرد که تودهٔ مؤثریکه باعث نیروهای ماند برروی طناب میباشد آن تودهایست که اگر در سطح قائم طناب متمرکز میشد همان مقدار لنگر ماند تودهای را نسبت بمحور دوران میداشت که بار مردهٔ پل وطناب دارد. بدین ترتیب تودهٔ پل $\frac{۲W}{g}$ در واحد طول وبشعاع ژیراسیون r ولنگر ماند $\frac{۲W}{g}r^۲$ میباشد. ایـن مقدار مساویست با لنگرماند $\frac{۲W'}{g}\left(\frac{b}{۲}\right)^۲$ تودهٔ مؤثر. ازاینرو $W' = W\left(\frac{۲r}{b}\right)^۲$ میباشد. بدینطریق معادلهٔ (۶) درمورد نوسانهای پیچشی قابل اعمال است اگر عبارت نیروی ماند $\frac{W}{g}\omega^۲\eta$ در $\left(\frac{۲r}{b}\right)^۲$ ضرب گردد.
این بدان معنی است که عدد μ بکار برده شده درمعادلهٔ (۷) که بکمک معادلات (۱۳) و (۱۴ الف وب) یا ۱۷) تعیین شده است بایستی معرف مقدار :

$$\frac{1}{۲}\omega_T\sqrt{\frac{W}{H_w g}\left(\frac{۲r}{b}\right)^۲}$$

باشد که ازآن نتیجه میشود:

$$\omega_T = \left(\frac{b}{۲r}\right)\omega$$

برای یک طرز نوسان، یا یک شکل موج معین، جواب μ در ارتعاشات پیچشی وقائم یکسان خواهد بودولی کمیت‌های ω وبسآمد f درعدد $\left(\frac{b}{۲r}\right)$ ضرب‌خواهدشد شد. رعایت این‌ضریب لازم‌است تا تودهٔ معادل‌را درسطح قائم طنابها ودر حرکت پیچشی بیان کند.

درمعادلهٔ(۱۹) جملهٔ $EI\frac{d^4y'}{dx^4}$ — معرف تأثیرصلبیت خمشی خرپا (یا شاه تیر) میباشد که مقاومت در واحد طول خرپا (یا شاه تیر) را وقتیکه تغییر شکل میدهد بیان میکند. دراین جمله E عبارت ازضریب ارتجاعی جسم خرپا (یا شاه تیر) و I لنگرماند آن میباشد.

با پیروی ازآنچه که درمورد ارتعاشهای قائم ذکرشد خواهیم داشت:

$$\frac{-EI}{H_w}\ \frac{d^4\eta}{dx^4}+\left(1+\frac{2KG}{H_wb^2}\right)\frac{d^2\eta}{dx^2}+\left(\frac{2r}{b}\right)^2\left(\frac{2\mu}{l}\right)^2\eta=\frac{8hH_0}{l^2H_w} \qquad (20)$$

اگر بجای:

$$k_0^2=\frac{H_w}{EI}\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

گزارده شود و طرفین معادلهٔ بالا را در $\left(\frac{2k_0}{l}\right)^2$ ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{d^4\eta}{dx^4}-\left(\frac{2k_0}{l}\right)^2\left(1+\frac{2KG}{H_wb^2}\right)\frac{d^2\eta}{dx^2}-\left(\frac{2r}{b}\right)^2\left(\frac{4\mu k_0}{l^2}\right)^2\eta=-\frac{8hH_0}{l^2H_w}\left(\frac{2k_0}{l}\right)^2 \qquad (21)$$

معادلهٔ دیفرانسیل بالا بطریقهٔ کلاسیک قابل حل میباشد. اختصارات زیر را بعداً بکارخواهیم برد:

$$S=1+\frac{2KG}{H_wb^2} \quad \text{و} \quad R^2=\left(\frac{2r}{b}\right)^2$$

$$k_R^2=k_0^2\left(\sqrt{R^2\left(\frac{\mu_T}{k_0}\right)^2+\frac{S^2}{4}}+\frac{S}{2}\right)$$

$$\mu_R^2=k_0^2\left(\sqrt{R^2\left(\frac{\mu_T}{k_0}\right)^2+\frac{S^2}{2}}-\frac{S}{2}\right)$$

$$\mu_T=\sqrt{\frac{W}{H_w\cdot g}}\cdot\frac{l}{2}\omega_T$$

دراین رابطهٔ اخیر ω_T عبارت از فرکانس دورانی ارتعاشهای پیچشی میباشد.

ارتعاش‌های پیچشی قرینه ـ درارتعاشهای پیچشی قرینه مقدار η بازای $+x$ همانمقداری را دارد که بازای $-x$ وهمچنین شرایط حدی زیر باید بکار برده شود:

$$\text{بازای} \quad x=\pm\frac{l}{2} \quad , \quad \frac{d^2\eta}{dx^2}=0$$

زیرا درمحاذات برجها لنگر خرپا مساویست با صفر چونکه خرپای پل‌درآنجاها مفصلی است‌وچون

$$-EI\frac{d^2y}{dx^2}=M$$

(علامت منها دراینفرمول از آن جهت است که η وقتی مثبت است که جهت آن از فوق به‌تحت باشد و لنگر

مثبت آنست که درتار فوقانی تیر تولید فشار کند) لذا شرط فوق باید تحقق یابد.

همچنین بازای $x=\pm\frac{l}{۲}$ ، $\eta=o$

با رعایت شرایط فوق η بصورت زیر نوشته میشود:

دهانهٔ وسطی:

$$\eta=\frac{۲hH_o}{\mu_T^۲R^۲H_w}\left[۱-K_R\frac{\cos ۲\mu_R\frac{x}{l}}{\cos\mu_R}-(۱-K_R)\frac{\cosh ۲k_R\frac{x}{l}}{\cosh k_R}\right] \qquad (۲۲)$$

دهانهٔ کناری :

$$\eta=\frac{۲hH_o}{\mu_T^۲R^۲H_w}\left[۱-K_R\frac{\cos ۲\mu_R\frac{x}{l}}{\cos\alpha\mu_R}-(۱-K_R)\frac{\cosh ۲k_R\frac{x}{l}}{\cosh\alpha k_R}\right] \qquad (۲۳)$$

که درآن :

$$K_R=\frac{k_R^۲}{\mu_R^۲+k_R^۲}$$

معادله‌ایکه تناوب از روی‌آن باید حساب شود درزیر ذکرمیگردد:

$$\tan\mu_R+۲\tan\alpha\mu_R=\mu_R+۲\alpha\mu_R-\left(\frac{\mu_R}{k_R}\right)^۳(\tanh k_R+۲\tanh\alpha k_R) \qquad (۲٤)$$

$$+(۱+۲\alpha)\frac{\mu_R^۳}{k_R^۲}-C\mu_R^۳\left(\frac{\mu_R^۲+k_R^۲}{k_o^۲}\right)$$

که درآن C عبارتست از:

$$C=\frac{H_wlL_E}{۱٦h^۲A_cE_c}$$

$$L_E=\int_{-l/۲-l_۱}^{l/۲+l_۱}\left(\frac{ds}{dx}\right)^۳dx$$

پس از حل معادلهٔ (۲٤) برای متغیر مستقل μ_R، مناسبتر آن خواهد بود که رابطهٔ زیر بکار رود:

$$k_R^۲=\mu_R^۲+Sk_o^۲$$

و :

$$\mu_T^۲=\left(\frac{\mu_R}{R}\right)^۲\left[\left(\frac{\mu_R}{k_o}\right)^۲+S\right]$$

از روی مقدار μ_R کمیت μ_T وبا دانستن آن ω_T محاسبه میگردد.

ارتعاش پیچشی غیرقرینه ـ در این نوع ارتعاش غیر قرینه معادلهٔ (۲۱) با توجه بوضع غیر قرینه

و شرایط حدی $\eta=0$ بازای $x=0$ و $x=\frac{l}{2}$ وهمچنین $M=0$ وبالنتیجه $\frac{d^2\eta}{dx^2}=0$ درنقاط $x=0$ و $x=\frac{l}{2}$
برای دهانهٔ وسطی چهار معادله برای تعیین ثابتهای انتگراسیون بدست میآید که ازآنجا نتیجه میشود:

$$\left.\begin{aligned}&\eta=\eta_0 \sin\left(2\mu_R \frac{x}{l}\right)\\ &\mu_R=n\pi \text{ و } n=1,2,3,\dots\end{aligned}\right\} 0<x<\frac{l}{2} \tag{۲۵ الف}$$

و:

$$\left.\begin{aligned}&\eta=\eta_0 \sin\left[\frac{2\mu_R}{l}\left(x-\frac{l}{2}\right)\right]\\ &\mu_R=\frac{n\pi}{2\alpha} \text{ و } n=1,2,3,\dots\end{aligned}\right\} \frac{l}{2}<x<\frac{l}{2}+\alpha l \tag{۲۵ ب}$$

درصورتیکه وسط طناب بوسط پل معلق بسته ومهار شده باشد حرکت پیچشی غیر قرینه بدون حرکت برج ممکن نمیباشد زیرا آشکار است که پل معلق در درازا نمیتواند با دوطناب حرکت کند وقتیکه حرکاتطولی آنها از فاز خارج باشد. معهذا حرکت پیچشی غیرقرینه حتی وقتیکه وسط طناب مهار شده باشد ممکناست، مشروط براینکه برجهابتواندحرکت کند واین شرط وقتی تحقق پیدا میکند کهبرجها بحدکافی درمقابل پیچش قابلیت انعطاف داشته باشد. چونبرجهای متداول درپلها درمقابل پیچش بیش ازخمش ساده مقاوممیباشد، وقوع یک حرکت پیچشی غیرقرینه درصورتیکه وسط طنابها بسته ومهار شده باشد محتمل بنظر نمیرسد؛ لذا ازشرحمعادلهٔ چنینحرکتی خودداری میشود. باید بخاطر داشت که حرکتی ازاین نوع ملازمه داردباآنکه دهانههای کناری هم مرتعش شود زیرا دوسر برج میبایستی حرکت کند.

تبصره - در اثبات فرمول (a) صفحهٔ ۳۹ از مربعات مقادیر کوچک ازمرتبهٔ دوم صرفنظر کردهبودیم وبعداً هم از تغییرمختصر زاویهٔ طناب چشم پوشی شده بود؛ درحالیکه با رعایت شرط اخیرلازم میآید که:

$$\Delta ds^2=d\xi^2+d\eta^2 \tag{الف}$$

باشد وبا توجه بآنکه:

$$ds^2=dx^2+dy^2 \tag{ب}$$

لذا در رابطهٔ زیر:

$$ds^2+2ds\Delta ds+\Delta ds^2=dx^2+dy^2+2dxd\xi+2dyd\eta+d\xi^2+d\eta^2$$

با استفاده از معادلات (الف) و (ب) نتیجه میگردد که:

$$ds\Delta ds=dxd\xi+dyd\eta$$

واز این معادله، رابطهٔ (a) نتیجه میگردد بدون اینکه لازم بذکرباشد که از مربعات مقادیر کوچک ازمرتبهٔ دوم صرفنظر میشود.