تغییر شکل و تنش‌های صفحه‌های گرد طره‌ای که تحت تأثیر بار خطی هموار در طول محیط باشد

نوشتهٔ :

محمد حسین کاشانی ثابت

PH.D.

معلم دانشکدهٔ فنی ورئیس‌مؤسسهٔ مهندسی راه وساختمان دانشکدهٔ صنعتی

مقدمه ـ درشمارهٔ دوم دورهٔ دوم‌نشریهٔ دانشکدهٔ فنی‌ونیز درمراجع [۱] و[۲] اینمقاله تغییرشکل وتنش های صفحه های گرد طره‌ای که تحت تأثیربار گسترده‌ای بشدت ثابت باشد بررسی گردید، چون‌درموارد استعمال این قبیل صفحه ها اغلب بار خطی هموار ی در طول محیط بصورت جان پناه برصفحه ها مؤثر است لذا تعیین تغییر شکل وتنش ها دراینحالت مورد نیاز طراحان‌ومهندسان‌محاسب خواهد بود. هدف‌ازنگارش اینمقاله ذکرراه حل این مسئله است.

یادآوری مجدد اصطلاحات وعلائم

$a =$ شعاع تکیه گاه گرد

$b =$ شعاع لبهٔ صفحه

$D =$ صلبیت خمشی $= \dfrac{Eh^3(1-\nu^2)}{12}$

$h =$ ضخامت صفحه

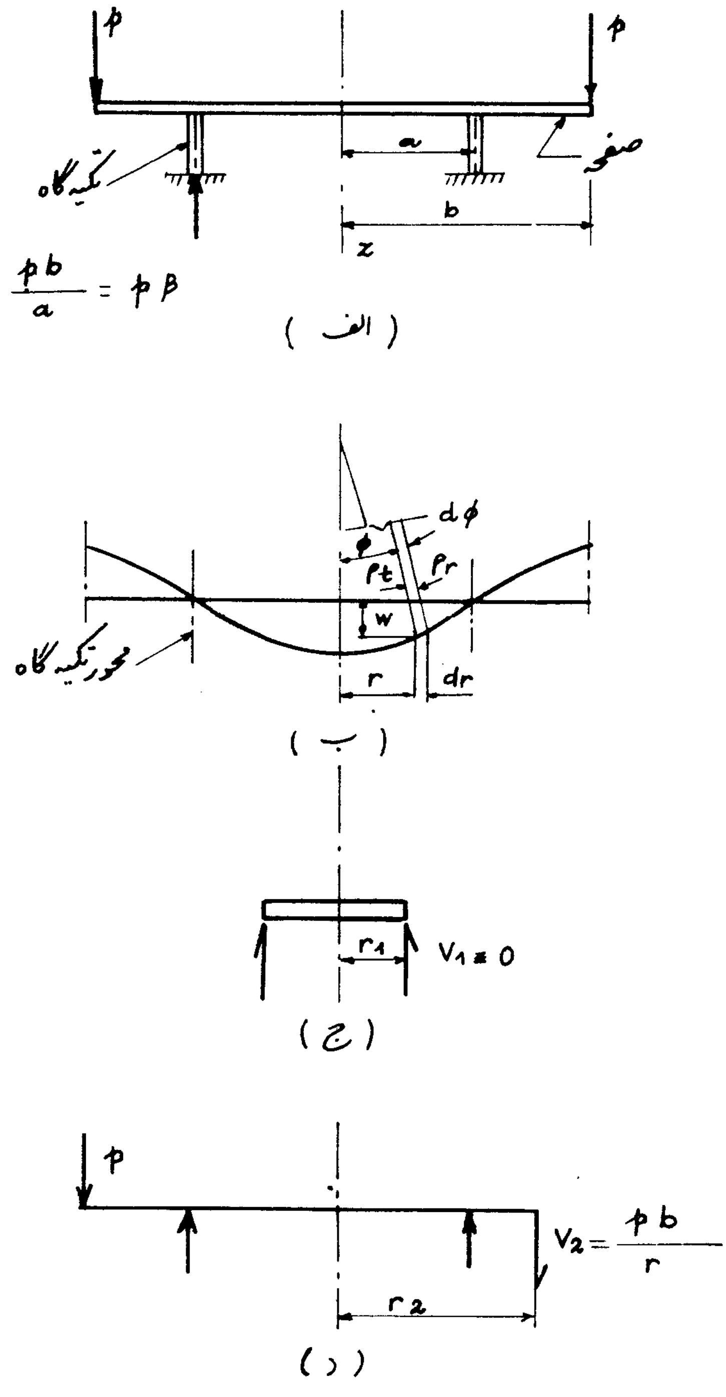
$E =$ ضریب ارتجاعی جسم صفحه

$\nu =$ ضریب پوآسون

$M_r =$ لنگر خمشی شعاعی درواحد طول که درصفحهٔ $r-z$ اثر میکند

$M_t =$ لنگرخمشی مماسی در واحد طول که درصفحهٔ $t-z$ اثر میکند

$p =$ بار خطی هموار برحسب کیلو گرم برواحد طول که برمحیط لبهٔ آزاد صفحهٔ مؤثر است



شکل (۱) - صفحه و اجزاء آن

v = نیروی برنده درواحد طول که موازی با محور z و در سطحی عمود براستداد شعاع اثر میکند

r = شعاع ـ متغیرمطلق

w = تغییرشکل سطح میانگین صفحه

φ = زاویهٔ مماس برمنحنی تغییرشکل

معادلهٔ دیفرانسیل صفحه برحسب φ

بطوریکه درمراجع [۱—٤] مذکور است معادلهٔ دیفرانسیل صفحه برحسب φ بصورت زیرمیباشد:

$$\frac{d^{۲}\varphi}{dr^{۲}}+\frac{۱}{r}\frac{d\varphi}{dr}-\frac{\varphi}{r}=\frac{V}{D} \qquad (۱)$$

که درآن φ ، r ، V و D دارای معانی‌مذکوردرفوق میباشد وصفحه‌بضخامت ثابت اندك وهمگن‌وایزوتروپ فرض میگردد. همچنین تکیه‌گاه صفحه را پیوسته فرض کرده و هیچگونه پیوستگی میان صفحه و تکیه‌گاه درنظرگرفته نمیشود.

بکمک تغییر متغیر بصورت:

$$r=e^{t} \qquad (۲)$$

معادلهٔ دیفرانسیل (۱) بشکل زیر نوشته میشود:

$$\frac{d^{۲}\varphi}{dt^{۲}}-\varphi=\frac{V}{D}\cdot e^{۲t} \qquad (۳)$$

ازشکلهای (۱ـج) و (۱ـد) آشکار است که V دومقدار مختلف در دوناحیهٔ مشخصهٔ صفحه دارد.

ناحیهٔ اول‌صفحه محصور است‌بین مرکز وتکیه‌گاه که‌درآن V برای جمیع نقاط این‌ناحیه‌صفراست:

$$V=o \qquad \text{بازای } r\leq a \qquad (٤)$$

ناحیهٔ دوم میان تکیه‌گاه ولبهٔ آزاد صفحه واقع است که درآن V بعبارت زیر میباشد:

$$V=\frac{pb}{r} \qquad \text{بازای } r>a$$

با رعایت معادلهٔ (۲) در رابطهٔ اخیر عبارت V دراین ناحیه بصورت زیر نوشته میگردد:

$$V=pb\cdot e^{-t} \qquad (٥)$$

با توجه بمعادلهٔ (٤) معادلهٔ دیفرانسیل (۳) درناحیهٔ اول صفحه منحصر بمعادلهٔ متجانس آن است یعنی:

$$\frac{d^{۲}\varphi}{dt^{۲}}-\varphi=o \qquad \text{بازای } r\leqslant a \qquad (٦)$$

جواب کلی معادلهٔ (٦) بصورت زیر میباشد:

$$\begin{cases}\varphi=Ae^{t}+Be^{-t}\\ \varphi=Ar+\dfrac{B}{r}\end{cases} \qquad (\text{۷ الف و ب})$$

در معادله‌های (۷ الف و ب) A و B ثابتهای انتگراسیون است . از روی شرط حدی $\varphi = o$ بازای $r = o$ درمورد مقدار معین φ نتیجه میگردد که :

$$B = o$$

و :

$$\varphi = Ar \qquad \text{بازای } r \leqslant a \qquad (۸)$$

عبارتهای لنگرهای خمشی برحسب A بصورت زیر است:

$$\text{بازای } r \leqslant a \quad \begin{cases} M_r = D\left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu\frac{\varphi}{r}\right) = DA(۱+\nu) \\ M_t = D\left(\frac{\varphi}{r} + \nu\frac{d\varphi}{dt}\right) = DA(۱+\nu) = M_r \end{cases} \qquad (\text{۹ الف و ب})$$

با توجه بعبارت‌های اشعهٔ انحناء شعاعی ومماسی ρ_r و ρ_t که بصورت زیر است:

$$\frac{۱}{\rho_r} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dr} \quad \text{و} \quad [ds = dr]$$

و :

$$\frac{۱}{\rho_t} = \frac{\varphi}{r}$$

وگزاردن مقدار φ از رابطهٔ (۸) نتیجه میشود که :

$$\frac{۱}{\rho_r} = \frac{۱}{\rho_t} = A$$

یا :

$$\rho_r = \rho_t = \frac{۱}{A}$$

از اینمعادله ومعادلات (۹ الف وب) نتیجه میشود که ناحیهٔ اول صفحه تحت تأثیر خمش کروی میباشد .

برای محاسبهٔ A باید بدواً عبارت‌های φ ، M_r و M_t را برای ناحیهٔدوم صفحه محاسبه کردوسپس با استفاده ازشرایط حد وپیوستگی معادلات لازم را برای بدست‌آوردن A وسایر ثابتهای انتگراسیون نوشت. برای رسیدن بدین منظور ملاحظه‌میشود که چون عبارت V درناحیهٔ دوم بامعادلهٔ (۵) بیان شده‌لذا معادلهٔ دیفرانسیل کلی (۳) برای این ناحیه بصورت زیر نوشته میشود:

$$\frac{d^۲\varphi}{dt^۲} - \varphi = \frac{pb}{D}e^t \qquad \text{بازای } r > a \qquad (۱۰)$$

جواب معادلهٔ متجانس (۱۰) بصورت زیر میباشد:

$$\varphi_h = Fe^t + Ge^{-t} \qquad \text{بازای } r > a$$

با رعایت معادلهٔ (۲) دراینمعادله نتیجه میشود:

$$\varphi_h = Fr + \frac{G}{r}$$

چون جواب کلی معادلهٔ (۱۰) از افزودن جوابهای معادلهٔ متجانس ومخصوص آن بدست میآید پس لازمست که جواب مخصوص یا جواب طرف ثانی اینمعادله جستجو گردد. برای اینکار جواب مخصوص را بصورت:

$$\varphi_p = cte^t$$

درنظر گرفته وآنرا درمعادلهٔ (۱۰) آزمایش کرده ونتیجه میگیریم که :

$$C = \frac{pb}{۲D}$$

علت اینکه جواب مخصوص معادلهٔ (۱۰) بصورت فوق درنظر گرفته شده ازآنجهت است که e^t یکی ازجوابهای معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ متجانس (۱۰) میباشد لذا طبق آنچه که در کتابهای آنالیز مذکور استبایدجواب مخصوص بصورت فوق آزمایش گردد.

بدین ترتیب جواب کلی معادلهٔ (۱۰) بصورت زیر میباشد:

$$\begin{cases} \varphi = Fe^t + Ge^{-t} + \frac{pb}{۲D} te^t \\ \varphi = Fr + \frac{G}{r} + \frac{pb}{۲D} r\log_n r \end{cases} \quad \text{بازای } r>a \qquad (\text{۱۱ الف وب})$$

با استفاده از معادلهٔ (۱۱ ب) در عبارت‌های کلی (۹ الف وب) ، M_r و M_t دراین ناحیه دارای عبارت‌های زیر میباشد:

$$\begin{cases} M_r = D\left[(۱+\nu)F - (۱-\nu)\frac{G}{r^۲} + \frac{pb}{۲D}(۱+\nu)\log_n r + \frac{pb}{۲D}\right] \\ M_t = D\left[(۱+\nu)F + (۱-\nu)\frac{G}{r^۲} + \frac{pb}{۲D}(۱+\nu)\log_n r + \frac{pb}{۲D}\nu\right] \end{cases} \quad r>a \qquad (\text{۱۲ الف وب})$$

محاسبهٔ ثابتهای انتگراسیون

برای محاسبهٔ ثابتهای انتگراسیون A ، F و G شرایط پیوستگی وحدی زیرین بکاربرده میشود:

$$\begin{cases} (\varphi_۱)_{r_۱=a} = (\varphi_۲)_{r_۲=a} \\ (M_{r۱})_{r_۱=a} = (M_{r۲})_{r_۲=a} \\ (M_{r۲})_{r_۲=b} = o \end{cases} \qquad (۱۳)$$

از اینمعادلات، باگزاردن :

$$\beta = \frac{b}{a}$$

نتیجه میگردد:

(۱٤ الف-ج)

$$\begin{cases} A=-\dfrac{pb}{4D}\left[\dfrac{1+\nu}{1+\nu}\left(1-\dfrac{1}{\beta^2}\right)+2\log_n\beta\right] \\ F=-\dfrac{pb}{4D}\left[\dfrac{1}{1+\nu}\left(2-\dfrac{1-\nu}{\beta^2}\right)+2\log_n b\right] \\ G=\dfrac{pb^3}{4D}\cdot\dfrac{1}{\beta^2} \end{cases}$$

با گزاردن‌مقادیر A ، F و G بترتیب درمعادلات (۹ الف‌وب) و (۱۲ الف وب) عبارت‌های لنگرهای‌خمشی شعاعی ومماسی بشرح زیر خواهد بود:

$$M_{r_1}=M_{t_1}=-\frac{pb}{4}\left[(1-\nu)\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right)+2(1+\nu)\log_n\beta\right] \quad \text{بازای } r<a \qquad (15)$$

$$M_{r_2}=-\frac{pb}{4}\left[\frac{1-\nu}{\beta^2}\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right)+2(1+\nu)\log_n\frac{b}{r}\right] \qquad (16)$$

بازای $r>a$

$$M_{t_2}=-\frac{pb}{4}\left\{\frac{1-\nu}{\beta^2}\left[2\beta^2-\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)\right]+2(1+\nu)\log_n\frac{b}{r}\right\} \qquad (17)$$

$$V_1=o \quad \text{و} \quad V_2=p\frac{b}{r} \qquad \text{(۱۸ الف وب)}$$

از معادلات (۱۵ ، ۱۶ و ۱۷) دیده میشود که لنگرها در جمیع نقاط صفحه منفی میباشد، نتیجه‌ایکه قابل پیش بینی بوده است.

محاسبهٔ تغییرشکل

اگر W_1 تغییر شکل صفحه درناحیهٔ اول باشد با توجه برابطهٔ:

$$\frac{dw}{dr}=-\varphi$$

داریم :

$$w_1=-\int\varphi_1 dr+K_1 \qquad (19)$$

با استفاده از شرط حدی $w_1=o$ بازای $a=r$، میتوان مقدار K_1 را محاسبه کرد. پس ازانجام محاسبه نتیجه میگردد:

$$K_1=-\frac{pb^3}{8D}\cdot\frac{1}{\beta^2}\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right)+2\log_n\beta\right]$$

که درآن $\beta=\dfrac{b}{a}$ میباشد. هم چنین w_1 بعبارت زیرخواهد بود:

$$w_1 = -\frac{pb^3}{8D}\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{r^2}{b^2}\right)\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right)+2\log_n\beta\right], \text{بازای } r \leqslant a\left(=\frac{b}{\beta}\right) \qquad (۲۰)$$

از معادلهٔ (۲۰) استنباط میگردد که w_1 منفی میباشد، نتیجه‌ایکه قابل پیش بینی بوده است.

با اجرای یک انتگراسیون نظیر برای ناحیهٔ دوم، با شرط حدی $w_2 = 0$ بازای $r = a$ ومحاسبهٔ ثابت جدیدانتگراسیون، عبارت w_2 بشرح زیرخواهد بود:

$$w_2 = \frac{pb^3}{8D}\left\{\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right)+2\log_n\beta+2\right]\left(\frac{r^2}{b^2}-\frac{1}{\beta^2}\right) - \frac{2r^2}{b^2}\log_n\frac{\beta r}{b} - \frac{2}{\beta^2}\log_n\frac{\beta r}{b}\right\} \quad \text{بازای } r > a\left(=\frac{b}{\beta}\right) \qquad (۲۱)$$

بکمک معادلات (۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۲۰ و ۲۱) درهرنقطهٔ صفحه‌میتوان لنگرهای خمشی، نیروی برنده وتغییر شکلها را محاسبه کرد.

((ضمیمه))

عبارات w_1 و w_2 را بطرق دیگری نیز بشرح زیر میتوان بدست‌آورد. در مقالهٔ سابق اینجانب که در شمارهٔ دوم دورهٔ دوم دانشکدهٔ فنی منتشر شده بود دیدیم وقتیکه صفحه از تقارن برخوردار باشد معادلهٔ دیفرانسیل آن بصورت زیر خواهد بود:

$$\nabla^2\nabla^2 w = w'''' + \frac{2}{r}w''' - \frac{w''}{r^2} + \frac{w'}{r^3} = \frac{q}{D} \qquad (۲۲)$$

اگر $q = 0$ باشد، دراینصورت جواب اینمعادلهٔ دیفرانسیل منحصر بجواب معادلهٔ متجانس آن شده و برای دوناحیهٔ صفحه بصورت‌زیر نوشته‌میشود:

$$r \leqslant a \qquad w_1 = c_1 + c_2\log_n r + c_3 r^2 + c_4 r^2\log_n r \qquad (۲۳)$$

و:

$$r > a \qquad w_2 = K + F\log_n r + G r^2 + H r^2\log_n r \qquad (۲۴)$$

چون مرکز صفحه نقطه‌ای از ناحیهٔ اول صفحه را تشکیل میدهد بنابراین با استفاده از شرایط regularity توابع w_1 ، M_r و M_t درمرکز صفحه یعنی:

$$\text{بازای } r = 0 \text{ ، } M_r \text{ ، } M_t \text{ و } w_1 \neq \infty$$

نتیجه میشود که:

$$c_2 = 0 = c_4 \qquad (۲۵)$$

عین این نتیجه را بطریقهٔ دیگری هم میتوان بدست آورد بدینمعنی که چون نیروی برندهٔ:

$$V = -4D \cdot C_4 \cdot \frac{1}{r}$$

درجمیع نقاط این ناحیه صفر است لذا ازآن نتیجه میگردد که :

$$c_4=o \qquad (۲۶)$$

باضافه $\frac{dw_1}{dr}=o$ بازای $r=o$ وبرای مقدار معین $\frac{dw_1}{dr}$ لذا خواهیم داشت :

$$c_2=o \qquad (۲۷)$$

ازاینرو معادلهٔ (۲۵) مبین معادلات (۲۶ و ۲۷) میباشد.

پس از رعایت معادلهٔ (۲۵) درمعادلهٔ (۲۳) عبارت w_1 بصورت زیرخلاصه میگردد:

$$w_1=c_1+c_3r^2 \qquad (۲۸)$$

در مورد w_2 از لحاظ شرایط بالا محدودیت‌هائی وجود ندارد لذا w_2 بصورت معادلهٔ (۲۴) خواهد بود که پس ازبکار بردن شرایط حدی (۱۳) وشرایط حدی زیر :

$$\begin{cases} o=w_1 \quad ، \quad a=r \ \text{بازای} \\ o=w_2 \quad ، \quad a=r \ \text{»} \\ p=V \quad ، \quad b=r \ \text{»} \end{cases} \qquad (\text{۲۹ الف-ج})$$

شش معادله برای محاسبهٔ c_1 ، c_3 ، F ، G ، H و K بدست میآید که پس از حل آنها ورعایت مقادیر این ضرایب درمعادله های (۲۸ و ۲۴) عبارت‌های w_1 و w_2 بمعادلات (۲۰ و ۲۱) منجر میگردد.

طریقهٔ سوم رسیدن به‌نتایج بالا ازقرار زیر است. درمرجع [۱] اینمقاله بیان شدکه نیروی برندهٔ V را بصورت زیر میتوان نوشت:

$$-\frac{V}{D}=\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] \qquad (۳۰)$$

لیکن درناحیهٔ اول صفحه $V=o$ ودر ناحیهٔ دوم $V=\frac{pb}{r}$ است‌لذامعادلهٔ(۳۰)دردوناحیهٔ‌صفحه‌بصورتهای زیر خواهد بود:

$$o=\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_1}{dr}\right)\right] \qquad r\leqslant a \qquad (۳۱)$$

و

$$\frac{-pb}{Dr}=\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_2}{dr}\right)\right] \qquad r>a \qquad (۳۲)$$

پس ازانتگراسیون معادلهٔ دیفرانسیل (۳۱) نتیجه میگردد که:

$$w_1=\frac{c}{4}r^2+c'\log_n r+c''$$

با رعایت شرط $\frac{dw_1}{dr}=o$ بازای $r=o$ وبرای مقدارمعین $\frac{dw_1}{dr}$ نتیجه میشود که:

$$c'=o$$

و w_1 بصورت زیر خواهد بود:

$$w_1=\frac{c}{٤}r^٢+c'' \qquad (٣٣)$$

پس ازانتگراسیون معادلهٔ (٣٢) عبارت $w_٢$ بدست میآید:

$$w_٢=\frac{K_1}{٤}r^٢+K_٢ log_n r-\frac{pb}{٤D}(r^٢ log_n r-r^٢)+K_٣ \qquad (٣٤)$$

تفاوت این $w_٢$ با معادلهٔ (٤٢) آنست که دراینجا ازشرط حدی $p=V$ بازای $b=r$ ضمن نوشتن عبارت کلی V برای این ناحیه، استفاده شده است. از اینرو دراینجا رویهم بجای ٦ ثابت ٥ ثابت‌انتگراسیون‌وجوددارد که با بکار بردن شرایط حدی(١٣) و(٩ ٢الف‌وب) وپیدا کردن‌ثابتها وگزاردن‌آنها درمعادلات (٣٣ و٣٤) عبارات w_1 و $w_٢$ بمعادلات (٢٠ و ٢١) منجرخواهد شد.

((فهرست مراجع))

١ — شمارهٔ دوم دورهٔ دوم نشریهٔ دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران، اردیبهشت ١٣٤٤ .

2— Sergev, S., and KASHANI-SABET, M.H. «Strength and Deflection of circular Uniformly Loaded slab Supported Between Center and Periphery,» U.S.A.: Journal of the American Concrete Institute, Proceedings V. 60, No. 2, Feb. 1963.

3— Prof. Sergev, S. et Dr. KASHANI-SABET, M.H. «Contraintes et Déflexions dans les dalles circulaires, chargées Uniformément et Appuyées entre le centre et la périphérie,» Paris: Revue de Béton Armé No. 66 Avril-Mai 1966 Société des éditions André Guerrin.

4— Timoshenko, S., and Woinowsky-Krieger, S. «Theory of Plates and Shells,» New York: McGraw-Hill. 1959.

5— KALMANOK, A.S. «Design of Plates.» Moscou, 1959.

6— GREKOW, A., Isnard, V., et MROZOWICZ, P. «Formulaire de l'Ingénieur, Méthodes Pratiques de Calcul d'ouvrages de Génie civil,» Paris: Editions Eyrolles, 61 Boulevard Saint-Germain. 1964.