درباب تصاویر ۲ - بعدی‌ها[۱] و ۳ - بعدی‌ها[۲]

نوشته‌ی :
دکتر علیرضا امیر معز
استاد دانشکدهٔ فنی تکزاس

فرض میکنیم که a مساحت قسمتی ازیک صفحه درفضای اقلیدسی ۳ - بعدی و B مساحت تصویر آن برروی یک صفحهٔ دیگر باشد. اگر θ زاویهٔ بین دوصفحه‌اختیارشود داریم : $B=a|\cos\theta|$.

غرض از اینمقاله‌اثبات این قضیه از راه روشهای ماتریسی وبرداری و تعمیم آن برای تصویر یک ۳ - بعدی برروی یک زیر فضای R_n ازیک فضای قائم[۳] حقیقی است.

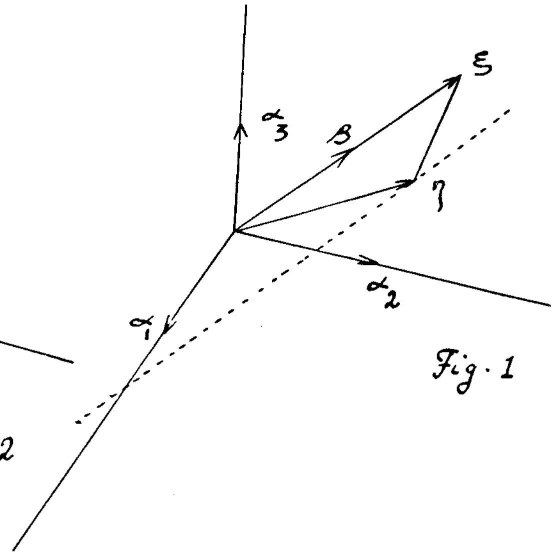
۱ - تعاریف وقراردادها : حاصلضرب داخلی دوبردار ξ و η با (ξ, η) نموده خواهد شد. اگر ξ_1 و ξ_2 و ... و ξ_k ، k بردارباشند، $[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k]$ معرف زیرفضائی که آنها می‌تنند خواهد بود. اگر $[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m]$ یک مجموعه از بردارهای بطور خطی مستقل در R_n و $\xi_i = x_{i1}\alpha_1 + \cdots + x_{in}\alpha_n$ که در آن $\left\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\right\}$ یک مبنای ارتونرمال در R_n است ، باشد ماتریس A که i امین سطرش $(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})$ $i=1,2,\cdots,m$ است یک ماتریس اندازهٔ[۴] m - بعدی نامیده میشود که توسط ξ_1 و ξ_2 و ... و ξ_m معین گردیده. اگر A' ترانسپوزهٔ A و $\det AA'$ معرف‌دترمینان AA' باشد میدانیم که‌برای‌اندازهٔاین m - بعدی‌داریم : $a=\frac{1}{m!}[\det AA']^{\frac{1}{2}}$ (۵) . کلیهٔ تصاویری که دراینجا ذکر میکنیم قائم یا هرمیتی‌هستند.

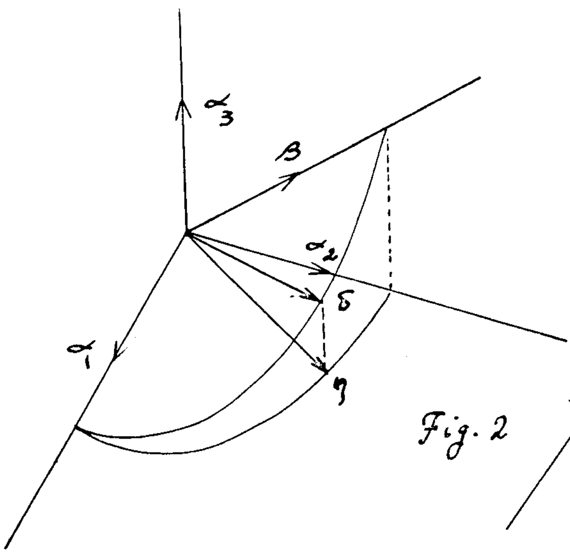
۲ - تصویر یک ۲ - بعدی : فرض میکنیم $\left\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right\}$ یک مبنای ارتونرمال و $\left\{\xi, \eta\right\}$ دوبردار بطورخطی مستقل درصفحهٔ ماربر α_1 باشد (ش - ۱). برای سهولت : $\xi \in [\alpha_2, \alpha_3]$ میگیریم.

بنابراین ماتریس : $A=\begin{pmatrix} 0 & (\xi, \alpha_2) & (\xi, \alpha_3) \\ (\eta, \alpha_1) & (\eta, \alpha_2) & (\eta, \alpha_3) \end{pmatrix}$ ،ماتریس‌اندازه‌ایست‌مربوط‌به ۲- بعدی که از (ξ, η) درست‌شده است. بدیهیست‌محاسبهٔ $\det AA'$ دراینجا چندان‌مشکل نیست. ولی بازاء $n>3$ این محاسبه دشوار میشود. برای ساده کردن $\det AA'$ برداریکه‌ای مانند β برروی ξ اختیار میکنیم. اگر η

۱- 2-Cells. ۲- 3-Cells. ۳- Unitary space. (٤) Measure matrix. ٥- [۱] , [۲].

طوری حرکت کند که خطی موازی ξ (متمم مجموعه) بوجودآورد ، مساحت مثلثی که برروی ξ و η بنا میشود مقداریست ثابت. لذا میتوانیم A را چنان انتخاب کنیم که سطراولش $(\beta , \xi)\beta$ وسطر دومش $(\eta , \alpha_1)\alpha_1$ باشد. اگر $t=(\xi , \beta)$ و $S=(\eta , \alpha_1)$ فرض‌شود ماتریس : $A=\begin{pmatrix} 0 & t(\beta , \alpha_2) & t(\beta , \alpha_3) \\ S & 0 & 0 \end{pmatrix}$ را میتوان ماتریس اندازه اختیار نمود. واز آنجا لازم میآید که داشته باشیم : $a=\frac{1}{2}|tS|$





(ش ۱)

(ش ۲)

حال تصویر این ۲ - بعدی را برروی صفحهٔ $[\alpha_1 , \alpha_2]$ تعیین میکنیم. در اینجا :

$B=\begin{pmatrix} 0 & t(\beta , \alpha_2) & 0 \\ S & 0 & 0 \end{pmatrix}$ یک ماتریس اندازه خواهد بود. لذا داریم : $\mathscr{B}=\frac{1}{2}|ts(\beta , \alpha_2)|$

دراینحال میتوانیم (β , α_2) رامثبت اختیار کنیم ولذا : $\mathscr{B}=a\cos\theta$ و $\cos\theta=(\beta , \alpha_2)$. اگراین مسئله را با روش بینهایت کوچک نیز بررسی کنیم صحت آن برای مساحت اشکال مختلف باز تأئید میشود.

۳ - مساحت بیضی : فرض میکنیم $\delta \in [\alpha_1 , \beta]$ و $|\delta|=a>$ که درآن β و بردارهای مبنا همان بردارهای قسمت دوم (ش - ۲) هستند ، باشند. لذا $\delta=p\alpha_1+q\beta$ است که در آن $p^2+q^2=a^2$ میباشد که معادلهٔ دایره‌ای است درصفحهٔ $[\alpha_1 , \beta]$. حال P یعنی تصویر آن رابرروی $[\alpha_1 , \alpha_2]$ درنظرمیگیریم. داریم:

$$\eta=p\delta=p^{p}\alpha_1\beta+q^{p}\beta=p\alpha_1+q(\beta , \alpha_2)\alpha_2$$

میتوانیم بی‌آنکه اشکالی در کلیت مسئله بوجودآید فرض کنیم : $0<\frac{b}{a}=(\beta , \alpha_2)$ باشد. بنابراین داریم: $\eta=p\alpha_1+q\frac{b}{a}\alpha_2$ لذا درصفحهٔ $[\alpha_1 , \alpha_2]$ داریم : $x=p$ و $y=q\frac{b}{a}$ و $p^2+q^2=a^2$.

ازآنجا لازم میآید که $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بوده‌مساحت تصویر : $\pi a^2(\beta , \alpha_2)=\pi ab$ شود.

٤ ـ تصویر یک ۳ ـ بعدی : فرض میکنیم $\left\{\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \alpha_4 , \alpha_5\right\}$ مبنای ارتونرمالی در R_5 باشد. ترتیب عمل ماطوریست که انتخاب R_5 توجیه خواهد شد. اگر $\left\{\beta_2 , \beta_3\right\}$ ارتونرمال و $[\alpha_2 , \alpha_4]$ بجای β_2 و $[\alpha_3 , \alpha_5]$ بجای β_3 اختیار شود بدیهیست که $\left\{\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3\right\}$ ارتونرمال خواهد بود.

حال ماتریس اندازه‌ای وابسته به مجموعهٔ بطورخطی مستقل $\left\{\xi_1 , \xi_2 , \xi_3\right\}$ که در آن $\xi_1=t_2\beta_2$ و ξ_2 برابر $[\beta_2 , \beta_3]$ و ξ_3 برابر $[\alpha_1 , \beta_2 , \beta_3]$ باشد انتخاب میکنیم. بدیهیست که این ماتریس اندازه، ماتریس زیر خواهد بود :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & (\xi_1 , \alpha_2) & 0 & (\xi_1 , \alpha_4) & 0 \\ (\xi_2 , \alpha_1) & (\xi_2 , \alpha_2) & (\xi_2 , \alpha_3) & (\xi_2 , \alpha_4) & (\xi_2 , \alpha_5) \\ (\xi_3 , \alpha_1) & (\xi_3 , \alpha_2) & (\xi_3 , \alpha_3) & (\xi_3 , \alpha_4) & (\xi_3 , \alpha_5) \end{pmatrix}$$

اما چون محاسبهٔ $\det AA'$ مشکل است روش قسمت سوم را بکار میبریم و ماتریسی مانند B چنان بدست میآوریم که $\det BB'=\det AA'$ باشد و بتوانیم $\det BB'$ را بسهولت حساب کنیم. اگر ξ_2 برروی یک متمم مجموعهٔ یک‌بعدی موازی با β_2 حرکت کند اندازهٔ حجم [1] ثابت میماند لذا : $(\xi_2 , \beta_3)\beta_3=t_3\beta_3$ را سطردوم ماتریس B میگیریم. بنابراین سطر سوم B نیز $(\xi_3 , \alpha_1)\alpha_1=t_1\alpha_1$ اختیار خواهدشد. پس داریم:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & t_2(\beta_2 , \alpha_2) & 0 & t_2(\beta_2 , \alpha_4) & 0 \\ 0 & 0 & t_3(\beta_3 , \alpha_3) & 0 & t_3(\beta_3 , \alpha_5) \\ t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ودرنتیجه :

$$BB'=\begin{pmatrix} t_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & t_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & t_1^2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad a=\frac{1}{3!}\left|t_1t_2t_3\right| .$$

حال فرض میکنیم p تصویر برروی $[\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3]$ باشد، ماتریس اندازهٔ تصویر حجم خواهد شد:

$$C=\begin{pmatrix} 0 & t_2(\alpha_2 , \beta_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3(\beta_3 , \alpha_3) & 0 & 0 \\ t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وازآنجا داریم :

$$\mathscr{B}=\frac{1}{3!}\left|t_1t_2t_3(\beta_2 , \alpha_2)(\beta_3 , \alpha_3)\right|$$

۵ ـ حجم یک بیضوی ـ فرض میکنیم $\xi \in [\alpha_1 , \beta_2 , \beta_3]$ و $|\xi|=a>0$ باشد. بدیهیست ξ کره‌ای ۳ بعدی رسم خواهد کرد. اگر $\xi=p_1\alpha_1+p_2\beta_2+p_3\beta_3$ باشد $p_1^2+p_2^2+p_3^2=a^2$ خواهد

۱- Cell

شد . اگر p تصویر برروی $[\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3]$ باشد :

$$\eta = p\xi = p_1\alpha_1 + p_2(\beta_2 , \alpha_2)\alpha_2 + p_3(\beta_3 , \alpha_3)\alpha_3$$

خواهدشد. فرض میکنیم:

$$|(\beta_2 , \alpha_2)| = \frac{b}{a} , |(\beta_3 , \alpha_3)| = \frac{c}{a} , \eta = (x , y , z)$$ باشد

لذا :

$$\begin{cases} x = p_1 \quad , \quad y = \pm\frac{b}{a} p_2 \quad , \quad z = \pm\frac{c}{a} p_3 \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = a^2 \end{cases}$$

ازآنجا لازم میآید که η بیضوی $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ را رسم نماید.

درواقع حالت $b=0$ یا $c=0$ نیزباید مورد نظرقرارگیرد. بنابراین حجم این بیضوی خواهد شد :

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} = \frac{4}{3}\pi abc$$

[۱] G. B./Price, Some identities in the theory of determinants, Amer. Math. Monthly, Vol. LIV , NO. ۲ , (۱۹٤۷) , pp. ۷۰—۹۰.

[۲] Carrett Birkhoff and Saunders Maclane, A suvey of modern algebra, The Macmillan CO. N. Y. , (۱۹٤۱, pp. ۲۹۳—۲۹٦)