صفحه‌های گرد طره‌ای که تحت تأثیر لنگری در لبه و بار خطی هموار قبل از محیط باشد

نوشتهٔ

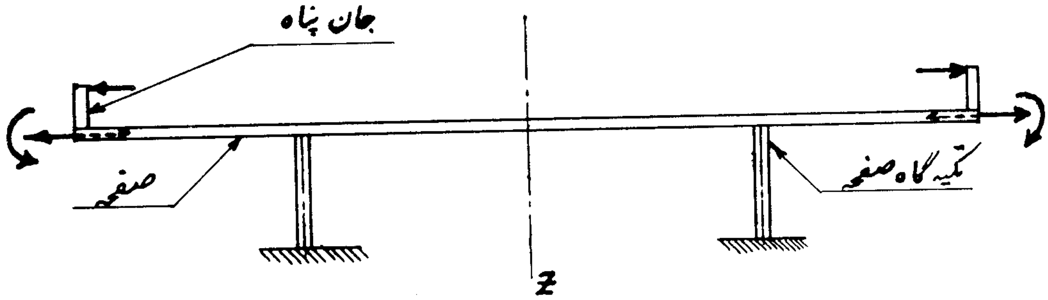
محمد حسین کاشانی ثابت

PH.D.

دانشیار مقاومت مصالح دانشکدهٔ فنی

مقدمه :

بموجب آئین نامه های فنی معمولاً درراس جان‌پناهها نیروی افقی همواری درنظر میگیرند که در محاسبه ، تأثیر آن معادل تأثیر لنگری ثابت ونیروئی افقی بر روی دستگاههای مقاوم ساختمانی خواهد بود (شکل ۱) .



شکل (۱)

هم‌چنین درپاره‌ای موارد جان‌پناه‌ها درست درلبهٔ صفحه ها واقع نبوده و کمی از محیط آن فاصله دارد؛ بنابراین در این مقاله دومسئله زیر جداگانه مورد بررسی قرار خواهد گرفت :

۱ - تعیین تغییرشکل وتنش های صفحه های گردطره‌ای که درلبهٔ آن لنگر ثابتی درواحد طول اثرمیکنند ،

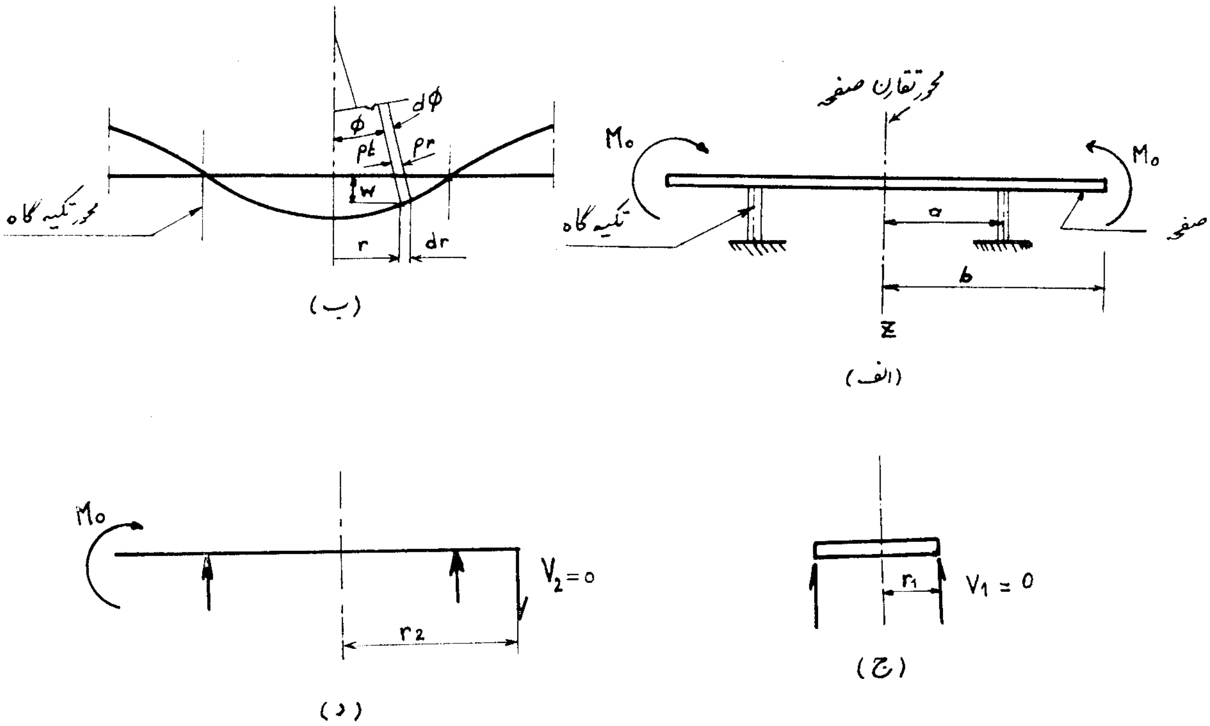
۲ - تعیین تغییر شکل وتنش های صفحه های گرد طره‌ای که تحت تأثیر بار خطی هموار قبل از محیط باشد .

برای حل هر دوقسمت فرض میگردد که صفحه بضخامت ثابت اندك ، همگن وایزوتروپ میباشد . تکیه گاه صفحه پیوسته فرض میشود لیکن هیچگونه پیوستگی میان صفحه وتکیه گاه درنظر گرفته نمیشود .

حروف ذکرشده دراین مقاله دارای همان معانی است که درشماره های سابق دورهٔ دوم نشریهٔ دانشکدهٔ فنی ذکر شده‌است .

قسمت اول ـ تعیین تغییرشکل وتنش‌های صفحه‌های گرد طره‌ای که درلبهٔ آن لنگر ثابتی اثرمیکند

با مراجعه بشکل (۲) دیده میشود که صفحه دارای دوناحیه است: ناحیهٔ اول درفاصلهٔ $o < r \leq a$



شکل (۲) ـ صفحه واجزاء آن

وناحیهٔ دوم درفاصلهٔ $a < r \leq b$ میباشد . درهردوناحیهٔ فوق نیروی برندهٔ V برابر صفر است ، لذا معادلهٔ دیفرانسیل صفحه دراینحالت بارگذاری بصورت زیر میباشد :

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi^*}{r^2} = o \qquad (1)$$

جواب کلی اینمعادله برای هرناحیه منجر بجواب خصوصی آن خواهد شد که بصورت زیر نوشته میشود :

$$\varphi_1 = Ar + \frac{B}{r} \quad , \; o < r \leq a \qquad (2)$$

* در دو شمارهٔ گذشتهٔ مجلهٔ دانشکدهٔ فنی بجای این جمله اشتباهاً $\frac{\varphi}{r}$ چاپ شده‌بود که باید اصلاح شود.

و

$$a<r\leq b \qquad \varphi_2=Fr+\frac{G}{r} \tag{۳}$$

از روی شرط $\varphi_1=o$ بازای $r=o$ در مورد مقدار معیین φ_1 نتیجه میگردد که :

$$B=o$$

و

$$\varphi_1=Ar \tag{۴}$$

وعبارت لنگرهای خمشی M_r , M_t بشرح زیر میباشد :

$$Mr_1=Mt_1=DA(1+v) \qquad o<r\leq a \tag{۵}$$

$$\left\{\begin{aligned} Mr_2&=D\left[(1+v)F-(1-v)\frac{G}{r^2}\right]\\ Mt_2&=D\left[(1+v)F+(1-v)\frac{G}{r^2}\right]\end{aligned}\right. \quad , \; a<r\leq b \tag{۶ الف و ب}$$

محاسبهٔ ثابتهای انتگراسیون

برای محاسبهٔ ثابتهای انتگراسیون A ، F , G از شرایط پیوستگی وحدی زیرین استفاده میگردد :

$$\left\{\begin{aligned} (\varphi_1)_{r_1=a}&=(\varphi_2)_{r_2=a}\\ (Mr_1)_{r_1=a}&=(Mr_2)_{r_2=a}\\ (Mr_2)_{r_2=b}&=M_o\end{aligned}\right. \tag{۷}$$

از اینمعادلات نتیجه میشود :

$$\left\{\begin{aligned} A&=F=\frac{M_o}{D(1+v)}\\ G&=o\end{aligned}\right. \tag{۸ الف و ب}$$

و

$$Mr_1=Mt_1=Mr_2=Mt_2=M_o \tag{۹}$$

محاسبهٔ تغییرشکل

با توجه بمعادلات (۸ الف و ب) نتیجه میشود که :

$$\varphi_1=\frac{M_o}{D(1+v)}r \qquad o<r\leq a$$

و

$$\varphi_2=\frac{M_o}{D(1+v)}r \qquad a<r\leq b$$

پس φ در هردوقسمت صفحه بیک عبارت زیر بیان میگردد :

$$\varphi=\frac{M_\circ}{D(1+\nu)}r \qquad (10)$$

چون W_1 , W_2 برای دوقسمت صفحه از انتگراسیون $(-\varphi_1)$, $(-\varphi_2)$ نتیجه میگردد وبرای تعیین دوثابت انتگراسیون باید از شرطهای‌حدی $W_1=o=W_2$ بازای $r_1=a=r_2$ استفاده کرد ، و از آنجائیکه φ_1 , φ_2 در سراسر صفحه بعبارت (۱۰) بیان میگردد پس W_1 , W_2 نیز در دوقسمت صفحه بعبارت زیر خواهدبود:

$$W=-\int\varphi dr+k=-\frac{M_\circ}{D(1+\nu)}\int rdr+k$$

یا :

$$W=-\frac{M_\circ}{2D(1+\nu)}r^2+k$$

با رعایت شرط حدی فوق :

$$k=\frac{M_\circ a^2}{2D(1+\nu)}$$

و از آنجا :

$$W=\frac{M_\circ a^2}{2D(1+\nu)}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)=\frac{M_\circ}{2D(1+\nu)}(a^2-r^2) \qquad (\text{۱۱ الف})$$

یا :

$$W=\frac{M_\circ b^2}{2D(1+\nu)}\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{r^2}{b^2}\right) \qquad (\text{۱۱ ب})$$

که دراین‌فرمول $\beta=\frac{b}{a}$ میباشد .

قسمت دوم ـ تغییرشکل وتنش‌های‌صفحه‌های‌گرد طره‌ای که تحت تأثیر بارخطی هموار قبل‌از محیط باشد

بطوریکه از شکل(۳) استنباط میگردد صفحه در اینحالت بارگذاری ازسه ناحیهٔ متمایز بشرح زیر تشکیل میگردد :

ناحیهٔ اول : $o<r\leq a$ که درآن :

$$V_1=o$$

پس دراین ناحیه بامقدماتیکه تاکنون دیدیم :

$$\Phi_1=Ar+\frac{B}{r}$$

که در آن $B=o$ وبالنتیجه Φ_1 بصورت زیر نوشتیه میگردد :

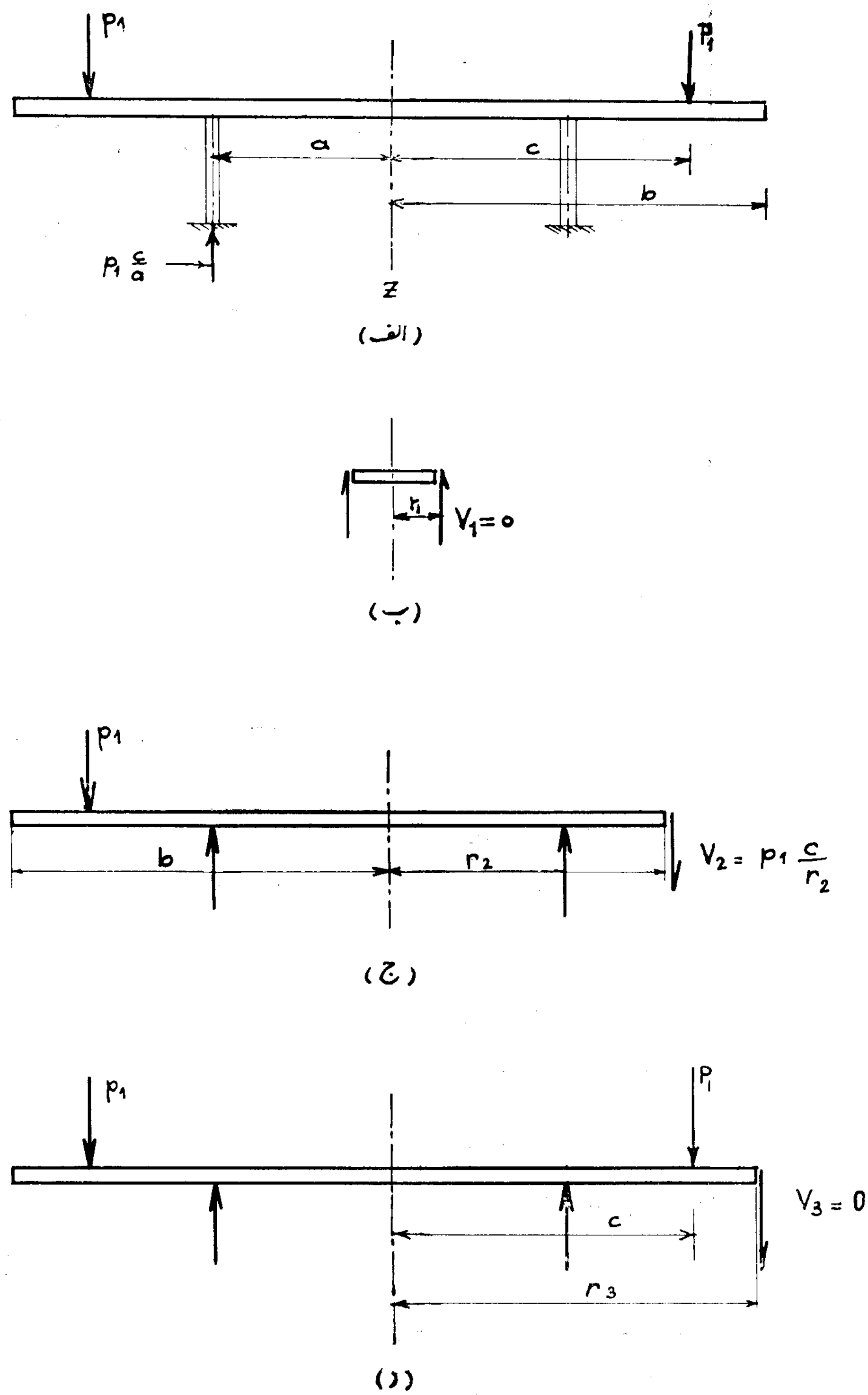
$$\Phi_1=Ar \qquad (12)$$

و

$$Mr_1=Mt_1=DA(1+\nu) \qquad (13)$$

ناحیهٔ دوم : $a<r\leq c$ که درآن :

$$v_2=p_1\frac{c}{r}$$



شکل ۳- صفحهٔ طره ای که تحت تأثیر بار خطی همواری قبل از محیط قرار دارد

و بالنتیجه :

$$\left\{\begin{array}{l}\Phi_2=Fr+\frac{G}{r}+\frac{p_1c}{2D}r\,log_n r\\ Mr_2=D\left[(1+v)F-(1-v)\frac{G}{r^2}+\frac{p_1c}{2D}(1+v)log_n r+\frac{p_1c}{2D}\right]\\ Mt_2=D\left[(1+v)F+(1-v)\frac{G}{r^2}+\frac{p_1c}{2D}(1+v)log_n r+\frac{p_1c}{2D}v\right]\end{array}\right. \quad (۱۴ الف-ج)$$

ناحیهٔ سوم : $c<r\leq b$ که در آن :

$$V_3=0$$

و Φ_3 ، Mr_3 , Mt_3 بعبارتهای زیر خواهدبود :

$$\left\{\begin{array}{l}\Phi_3=Hr+\frac{I}{r}\\ Mr_3=D\left[(1+v)H-(1-v)\frac{I}{r^2}\right]\\ Mt_3=D\left[(1+v)H+(1-v)\frac{I}{r^2}\right]\end{array}\right. \quad (۱۵ الف-ج)$$

محاسبهٔ ثابتهای انتگراسیون

از معادلات (۱۲)، (۱۴ الف - ج) و (۱۵ الف - ج) دیده میشود که جمعاً پنج ثابت انتگراسیون وجود دارد که باید از شرایط پیوستگی وحدی زیرین محاسبه گردد :

(الف) $(\Phi_1)_{r_1=a}=(\Phi_2)_{r_2=a}$

(ب) $(Mr_1)_{r_1=a}=(Mr_2)_{r_2=a}$

(ج) $(\Phi r_2)_{r_2=c}=(\Phi_3)_{r_3=c}$

(د) $(Mr_2)_{r_2=c}=(Mr_3)_{r_3=c}$

(ه) $(Mr_3)_{r_3=b}=0$

از این شرایط پنج معادله بشرح زیر نتیجه میگردد :

$$A-F-\frac{G}{a^2}=-\frac{p_1c}{2D}log_n a$$

$$A-F+\frac{1-v}{1+v}\times\frac{G}{a^2}=+\frac{p_1c}{2D}log_n a+\frac{p_1c}{2D(1+v)}$$

$$F+\frac{G}{c^2}-H-\frac{I}{c^2}=-\frac{p_1c}{2D}log_n c$$

$$F-\frac{1-\nu}{1+\nu}\times\frac{G}{c^2}-H+\frac{1-\nu}{1+\nu}\times\frac{I}{c^2}=-\frac{p_1c}{2D}\log_n c-\frac{p_1c}{2D(1+\nu)}$$

$$H-\frac{1-\nu}{1+\nu}\times\frac{I}{b^2}=0$$

که پس از حل آنها ثابتهای A ، F ، G ، H و I بعبارت‌های زیر بدست میآید :

$$A=\frac{p_1c}{4D}\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)-2\log_n\frac{c}{a}\right]$$

$$F=\frac{p_1c}{4D}\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)-1-2\log_n c\right]$$

$$G=\frac{p_1ca^2}{4D}$$

$$H=\frac{p_1c}{4D}\times\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)$$

$$I=\frac{p_1c}{4D}(a^2-c^2)$$

دراین معادلات $\beta=\frac{b}{a}$ ، $\gamma=\frac{b}{c}$ و هردو بزرگتر ازواحد میباشد .

اگر مقدار A ، F ، G ، H و I را بترتیب درمعادلات (۱۳)،(۱٤ بوج) و (۱٥ بوج)قراردهیم عبارت‌های لنگرهای خمشی شعاعی ومماسی درسه‌ناحیهٔ صفحه بشرح زیر خواهد بود :

$$Mr_1=Mt_1=\frac{p_1c}{4}\left[(1-\nu)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)-2(1+\nu)\log_n\frac{c}{a}\right],\quad 0<r\leq a \qquad (۱۶)$$

$$\left\{\begin{aligned} Mr_2&=\frac{p_1c}{4}\left[(1-\nu)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}-\frac{b^2}{\beta^2r^2}+1\right)-2(1+\nu)\log_n\frac{c}{r}\right]\\ Mt_2&=\frac{p_1c}{4}\left[(1-\nu)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}+\frac{b^2}{\beta^2r^2}-1\right)-2(1+\nu)\log_n\frac{c}{r}\right]\end{aligned}\right.\quad a<r\leq c \qquad (۱۷\ \text{الف‌وب})$$

$$\left\{\begin{aligned} Mr_3&=\frac{p_1c}{4}(1-\nu)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}-\frac{a^2-c^2}{r^2}\right)\\ Mt_3&=\frac{p_1c}{4}(1-\nu)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}+\frac{a^2-c^2}{r^2}\right)\end{aligned}\right.\quad c<r\leq b \qquad (۱۸\ \text{الف‌وب})$$

از معادله‌های(۱۶) و(۱۸ الف‌وب) دیده میشود که Mr_1 و Mt_1 مساوی‌باهم،منفی و مقدار ثابتی میباشد ، همچنین :

$$Mr_3+Mt_3=\frac{p_1c}{2}(1-\nu)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)=\text{مقداریست ثابت}$$

محاسبهٔ تغییر شکل

تغییر شکل سه ناحیه صفحه را از روی رابطهٔ

$$\frac{dW}{dr} = -\varphi$$

میتوان بدست آورد از اینرو W_1 ناحیهٔ اول صفحه با توجه برابطهٔ بالا بصورت زیر خواهدبود :

$$W_1 = -\int \Phi_1 dr + k_1 = -\frac{Ar^2}{2} + k_1$$

با بکار بردن شرط حدی $W_1 = 0$ ، بازای $a = r$ مقدار k_1 محاسبه میگردد :

$$K_1 = \frac{Aa^2}{2} = \frac{p_1 ca^2}{4D}\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right) - 2\log_n \frac{c}{a}\right]$$

وازآنجا W_1 بعبارت زیر نوشته میشود :

$$W_1 = \frac{p_1 c}{8D}\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right) - 2\log_n \frac{c}{a}\right](a^2 - r^2) \qquad (19)$$

با استفاده از رابطهٔ (۱۶) ، W_1 را بصورت ساده‌تری میتوان نوشت :

$$W_1 = \frac{Mr_1}{2D(1+\nu)}(a^2 - r^2) = \frac{Mr_1 b^2}{2D(1+\nu)}\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{r^2}{b^2}\right) \qquad (\text{۱۹ مکرر})$$

بااجرای یک‌انتگراسیون‌نظیر واستفاده از شرط حدی $W_2 = 0$ بازای $a = r$ ، عبارت W_2 بدست میآید :

$$W_2 = \frac{p_1 c}{8D}\left\{\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right) - 2 - 2\log_n \frac{c}{a}\right](a^2 - r^2) + 2r^2 \log_n \frac{a}{r} + 2a^2 \log_n \frac{a}{r}\right\} \qquad (20)$$

هم‌چنین عبارت W_3 را بابکار بستن طریقهٔ بالاوبکار بردن‌شرط‌حدی $W_2 = W_3$ بازای $c = r$ ، میتوان‌بدست‌آورد:

$$W_3 = \frac{p_1 c}{8D}\left\{\frac{1-\nu}{1-\nu}\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)(a^2 - r^2) + 2(c^2 - a^2)\left(1 + \log_n \frac{r}{a}\right) + 2(c^2 + a^2)\log_n \frac{a}{c}\right\} \qquad (21)$$

یا :

$$W_3 = \frac{p_1 b^3}{8D\gamma}\left\{\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{r^2}{b^2}\right) + 2\left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\beta^2}\right)\left(1 + \log_n \frac{\beta r}{b}\right) + 2\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)\log_n \frac{\gamma}{\beta}\right\} \qquad (\text{۲۱ مکرر})$$

حالت خاص

اگر $b=c$ باشد ۲=۱ خواهد بود و در اینصورت عبارت لنگرهای شعاعی و مماسی ، W_1 و W_2 بصورت زیر نوشته میشود :

$$Mr_1 = Mt_1 = -\frac{p_1 b}{4}\left[(1-\nu)\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right) + 2(1+\nu)\, log_n \beta \right] \tag{۲۲}$$

$$o<r\leq a$$

$$W_1 = -\frac{p_1 b^3}{8D}\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right)+2\, log_n \beta \right]\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{r^2}{b^2}\right)\Big] \tag{۲۳}$$

$$Mr_2 = -\frac{p_1 b}{4}\left[\frac{1-\nu}{\beta^2}\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right)+2(1+\nu)\, log_n \frac{b}{r}\right] \tag{۲۴}$$

$$Mt_2 = -\frac{p_1 b}{4}\left\{\frac{1-\nu}{\beta^2}\left[2\beta^2-\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)\right]+2(1+\nu)\, log_n \frac{b}{r}\right\} \quad a<r\leq c \tag{۲۵}$$

$$W_2 = \frac{p_1 b^3}{8D}\left\{\left[\frac{1-\nu}{1-\nu}\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right)+2\, log_n \beta + 2\right]\left(\frac{r^2}{b^2}-\frac{1}{\beta^2}\right) - \frac{2r^2}{b^2} log_n \frac{\beta r}{b} - \frac{2}{\beta^2} log_n \frac{\beta r}{b}\right\} \tag{۲۶}$$

بطوریکه دیده میشود معادلات(۲۲-۲۶) همان معادلات (۱۵-۱۷) و(۲۰ و ۲۱) مقالهٔ سابق اینجانب میباشد که درشمارهٔ قبلی نشریهٔ دانشکدهٔ فنی منتشر گردیده‌بود .

بحث و نتیجه

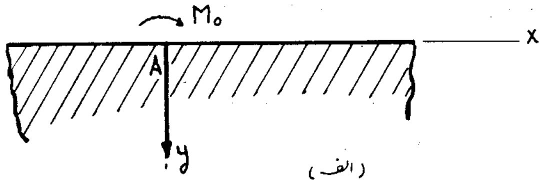
در شمارهٔ هفتم دورهٔ دوم‌نشریهٔ دانشکدهٔ فنی عبارت‌های‌لنگر خمشی‌وتغییر شکل را وقتیکه صفحهٔ طره‌ای تحت تأثیر نیروی خطی‌هموار درلبه باشد ، بدست آورده بودیم ؛ در قسمت‌دوم‌این مقاله‌عبارت‌های نظیر این توابع را درناحیه های مختلفهٔ صفحه وقتیکه تحت تأثیر نیروی خطی هموار قبل از محیط باشدپیدا کردیم ودیدیم نتایج بدست آمدهٔ مقالهٔ سابق مورد خاصی از حالت بارگذاری صفحه که درقسمت‌دوم مقالهٔ کنونی ذکر شده است میباشد .

اینک توجه خوانندگان مجله را باین نکته جلب‌میکند که ممکن است بذهن برخی اشخاص‌خطور کند که راه حل قسمت اول اینمقاله را یعنی وقتیکه صفحه درمحیط خویش تحت تأثیر لنگر ثابتی‌است‌بتوان با مشتق گرفتن عبارات این توابع وقتیکه صفحه تحت تأثیر بارخطی هموار باشد مانند طریقه‌ایکه درتیرها متداول است بدست آورد . درزیر نشان خواهیم داد که بااستفاده از قاعدهٔ «اجتماع اثرقوا» * ورعایت قواعد حدنه مشتق گرفتن از عبارات فوق الذکر (زیرا نواحی متفاوت میباشد) ، میتوان باین هدف‌رسید .

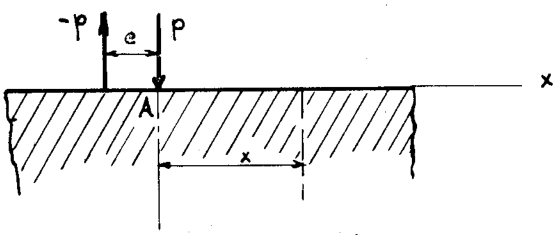
* The law of Superposition

برای روشن‌شدن موضوع ذکر مثالی مفید خواهد بود :

تیر بطول بینهایتی را که بر روی تکیه‌گاه ارتجاعی قرار داشته باشد، درنظر میگیریم که تحت‌تأثیر لنگر ثابت M_o در نقطهٔ A (شکل ٤ الف) بوده و منظور پیدا کردن تغییر شکل y مقطعی از آن که بفاصلهٔ x از A است باشد . اثر زوج M_o معادل با اثر نیروهای‌متمرکز (P و P—) است (شکل ٤ب)، اگر pe به M_o



(الف)



(ب)

شکل (۴)

کند وقتیکه e بصفر نزدیک میگردد . تغییر شکل مقطع بفاصلهٔ x از مبدأ A براثر بارمتمرکز P برابر $PF(x)^{*}$ میباشدپس تغییر شکل کلی‌این‌مقطع‌براثر بارهای (P و P—) برابر با :

$$y = P[F(x) - F(x+e)]$$

خواهد بود که میتوان آنرا بصورت زیر نوشت :

$$y = Pe\left[\frac{F(x) - F(x+e)}{e}\right]$$

اگر e بصفر نزدیک‌گردد ، Pe به M_o میل میکند و خارج قسمت داخل ابروها به $\left(-\frac{dF}{dx}\right)$ میل خواهد کرد و از آن نتیجه میگردد که ؛

$$y = -M_o \frac{dF}{dx} \qquad (٢٧)$$

حال برای اینکه ازاین روش در مورد صفحه استفاده کنیم و به‌نتیجهٔ منظور درحل قسمت اول این مقاله‌برسیم باید آنرا باوضع مخصوص صفحه وفق داد :

* - برای اطلاع از تابع F(x) بصفحهٔ پانزدهم‌جلددوم کتاب مقاومت مصالح استادتیموچنکو مراجعه شود :

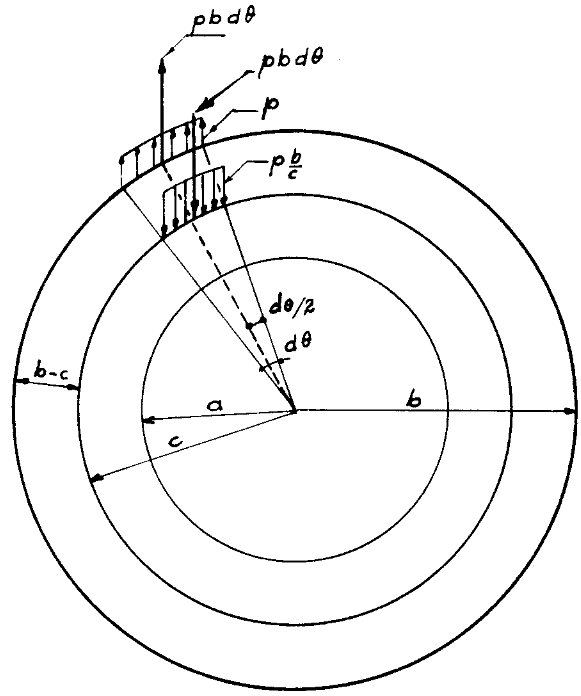
"Strength of Materials , Part II, by : Timoshenko, S., Third edition, D.Van Nostrand company INC.U.S.A., 1957.

فرض میکنیم که صفحهٔ طره‌ای تحت تأثیر دو بار خطی هموار باشد :

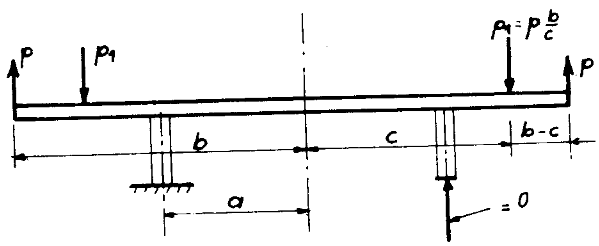
I ـ یکی بشدت p باجهت از تحت بفوق مؤثر درلبهٔ صفحه که برحسب kg/m بیان گردد،

II ـ دیگری بشدت p_1 باجهت‌از فوق به تحت مؤثر درمحیط‌دایرهٔ بشعاع c که برحسب کیلوگرم در واحد طول بیان گردد .

لنگرهای خمشی شعاعی ومماسی‌وتغییر شکل را در بارگذاری اول و دوم بترتیب به Mr_{1I} ، Mt_{1I} ، W_{1I}، Mr_{2I} ، Mt_{2I} , W_{2I} و Mr_{1II} ، Mt_{1II} ، W_{1II} ، Mr_{2II} ، Mt_{2II} و W_{2II} مینمائیم ،بنابراین لنگرهای خمشی وتغییر شکل کلی بقاعدهٔ اجتماع اثر قوا هریک برابر مجموع دومقدار نظیر خواهد بود :



(الف)



(ب)

شکل (۵)

$$\left.\begin{cases} Mr_1 = Mr_{1I} + Mr_{1II} \\ Mt_1 = Mt_{1I} + Mt_{1II} \\ W_1 = W_{1I} + W_{1II} \end{cases}\right\} \quad o<r\leq a \qquad \text{(۲۸ الف-ج)}$$

$$\left.\begin{cases} Mr_2 = Mr_{2I} + Mr_{2II} \\ Mt_2 = Mt_{2I} + Mt_{2II} \\ W_2 = W_{2I} + W_{2II} \end{cases}\right\} \quad o<r\leq c \qquad \text{(۲۹ الف-ج)}$$

شدت بارگستردهٔ p_1 باید طوری باشد که برای یک عنصر زاویه‌ای $d\theta$ آنچنان که در(شکل ۵ الف) نموده‌شده است مقدار باردر دودایرهٔ بشعاع c و b که محصور میان‌اضلاع این‌زاویه است بایکدیگر مساوی‌باشدیعنی :

$$p(bd\theta) = p_1(cd\theta)$$

از آنجا :

$$p_1 = p\,\frac{b}{c} \qquad (۳۰)$$

برای محاسبهٔ کمیت‌های Mr_{1I} ، Mt_{1I} ، W_{1I} و Mr_{2I} ، Mt_{2I} و W_{2I} از معادلات (۲۲-۲۶) استفاده کرده وپس از تغییر علامت آنها که بعلت تغییر جهت P میباشد خواهیم داشت :

$$\text{(۳۱الف-ه)}\begin{cases} Mr_{1I} = Mt_{1I} = \dfrac{pb}{4}\left[(1-\nu)\left(1-\dfrac{1}{\beta^2}\right) + 2(1+\nu)\log_n\beta\right] \\[2ex] W_{1I} = \dfrac{pb^3}{8D}\left[\dfrac{1-\nu}{1+\nu}\left(1-\dfrac{1}{\beta^2}\right) + 2\log_n\beta\right]\left(\dfrac{1}{\beta^2} - \dfrac{r^2}{b^2}\right) = \dfrac{Mr_{1I}}{2D(1+\nu)}(a^2-r^2) \\[2ex] Mr_{2I} = \dfrac{pb}{4}\left[\dfrac{1-\nu}{\beta^2}\left(\dfrac{b^2}{r^2}-1\right) + 2(1+\nu)\log_n\dfrac{b}{r}\right] \\[2ex] Mt_{2I} = \dfrac{pb}{4}\left\{\dfrac{1-\nu}{\beta^2}\left[2\beta^2 - \left(1+\dfrac{b^2}{r^2}\right)\right] + 2(1+\nu)\log_n\dfrac{b}{r}\right\} \\[2ex] W_{2I} = \dfrac{pb}{8D}\left\{\left[\dfrac{1-\nu}{1-\nu}\left(1-\dfrac{1}{\beta^2}\right) + 2\log_n\beta + 2\right](a^2-r^2) + 2r^2\log_n\dfrac{r}{a} + 2a^2\log_n\dfrac{r}{a}\right\} \end{cases}$$

هم‌چنین Mr_{1II} ، Mt_{1II} و W_{1II} و Mr_{2II} ، Mt_{2II} و W_{2II} را میتوان بارعایت معادلهٔ (۳۰) بجای p_1 درمعادله‌های (۱۶) ، (۱۷ الف وب) و (۱۹ و ۲۰) بشرح زیر بدست آورد :

$$
(۳۲\text{ الف - ه})\begin{cases}
Mr_{1II}=Mt_{1II}=\dfrac{pb}{4}\left[(1-\nu)\left(\dfrac{1}{\beta^2}-\dfrac{1}{\gamma^2}\right)-2(1+\nu)\log_n\dfrac{c}{a}\right]\\[2mm]
W_{1II}=\dfrac{pb}{8D}\left[\dfrac{1-\nu}{1+\nu}\left(\dfrac{1}{\beta^2}-\dfrac{1}{\gamma^2}\right)-2\log_n\dfrac{c}{a}\right](a^2-r^2)=\dfrac{Mr_{1II}}{2D(1+\nu)}(a^2-r^2)\\[2mm]
Mr_{2II}=\dfrac{pb}{4}\left[(1-\nu)\left(\dfrac{1}{\beta^2}-\dfrac{1}{\gamma^2}-\dfrac{b^2}{\beta^2r^2}+1\right)-2(1+\nu)\log_n\dfrac{c}{r}\right]\\[2mm]
Mt_{2II}=\dfrac{pb}{4}\left[(1-\nu)\left(\dfrac{1}{\beta^2}-\dfrac{1}{\gamma^2}+\dfrac{b^2}{\beta^2r^2}-1\right)-2(1+\nu)\log_n\dfrac{c}{r}\right]\\[2mm]
W_{2II}=\dfrac{pb}{8D}\left\{\left[\dfrac{1+\nu}{1+\nu}\left(\dfrac{1}{\beta^2}-\dfrac{1}{\gamma^2}\right)-2-2\log_n\dfrac{c}{a}\right](a^2-r^2)+2r^2\log_n\dfrac{a}{r}+2a^2\log_n\dfrac{a}{r}\right\}
\end{cases}
$$

باتوجه بمعادله های(۲۸ الف ـ ج) و (۲۹ الف ـ ج) ورعایت معادلات (۳۱ الف ـ ه) و (۳۲ الف ـ ه) در آنها عبارت‌های لنگرهای خمشی وتغییر شکل چنین خواهد بود :

$$
(۳۳\text{ الف - د})\begin{cases}
\left.\begin{aligned}
&Mr_1=Mt_1=\dfrac{pb}{4}\left[(1-\nu)\left(1-\dfrac{1}{\gamma^2}\right)+2(1+\nu)\log_n\gamma\right]\\
&W_1=\dfrac{pb(a^2-r^2)}{8D}\left[\dfrac{1-\nu}{1+\nu}\left(1-\dfrac{1}{\gamma^2}\right)+2\log_n\gamma\right]=\dfrac{Mr_1}{2D(1+\nu)}(a^2-r^2)
\end{aligned}\right\}\ o<r\leq a\\[2mm]
\left.\begin{aligned}
&Mr_2=\dfrac{pb}{4}\left[(1-\nu)\left(1-\dfrac{1}{\gamma^2}\right)+2(1+\nu)\log_n\gamma\right]=Mt_2=Mr_1=Mt_1\\
&W_2=\dfrac{pb}{8D}(a^2-r^2)\left[\dfrac{(1-\nu)}{(1+\nu)}\left(1-\dfrac{1}{\gamma^2}\right)+2\log_n\gamma\right]=\dfrac{Mr_2}{2D(1+\nu)}(a^2-r^2)
\end{aligned}\right\}\ a<r\leq c
\end{cases}
$$

از معادله های بالا دیده‌میشود که‌لنگرهای خمشی‌شعاعی‌و مماسی‌در دوناحیهٔ‌فوق‌مساوی‌با هم‌ومقداریست‌ثابت و W_1 ، W_2 بیک صورت نوشته میشود که آنرا با W خواهیم نمود .

اگرعبارات سمت‌راست‌معادله های(۳۳الف ـ د) رادر $(b-c)$ ضرب‌وبرآن تقسیم کنیم‌خواهیم‌داشت

$$
(۳۴\text{ الف و ب})\begin{cases}
M=Mr_1=Mt_1=Mr_2=Mt_2=\dfrac{p(b-c)}{4}\ \dfrac{\left[(1-\nu)\left(1-\dfrac{1}{\gamma^2}\right)+2(1+\nu)\log_n\gamma\right]}{\dfrac{b-c}{b}}\\[2mm]
W=\dfrac{M}{2D(1+\nu)}(a^2-r^2)
\end{cases}
$$

حال فرض میکنیم که c به b نزدیک گردد آنچنانکه حاصلضرب $p(b-c)$ در حد مقدار ثابت M_o باشد در

آنحال اثر ایندونیرو معادل اثر این زوج خواهد بود پس برای یافتن M و W کافی است که حد معادله (٤۳ الف) را وقتیکه c به b نزدیک میگردد پیدا کنیم. چون W عدد M را درفاکتور دارد لذا حد W از ضرب کردن $\frac{a^2-r^2}{2D(1+v)}$ در مقدار حدی M بدست خواهد آمد. اینک برای یافتن حد M کسر $\frac{b-c}{b}$ را بصورت زیر مینویسیم:

$$\frac{b-c}{b}=1-\frac{c}{b}=1-\frac{1}{\gamma}$$

بنابراین عبارت M بصورت زیر نوشته میشود:

$$M=\frac{P(b-c)}{4}\left[(1-v)\frac{\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)}{1-\frac{1}{\gamma}}+\frac{2(1+v)\log_n\gamma}{1-\frac{1}{\gamma}}\right]$$

عبارت راست معادلهٔ اخیر را بصورت زیر میتوان ساده کرد:

$$M=\frac{p(b-c)}{4}\left[(1-v)\frac{\gamma+1}{\gamma}+\frac{2(1+v)\gamma\log_n\gamma}{\gamma-1}\right] \qquad (۳۵)$$

وقتیکه c به b نزدیک گردد، درحد خواهیم داشت:

$$\text{حد}\; p(b-c)=M_0$$

$$\text{حد}\; \frac{b}{c}=\gamma=1$$

$$\text{حد}\; \frac{\gamma+1}{\gamma}=2$$

در معادلهٔ (۳۵) فقط کسر $\frac{\log_n\gamma}{\gamma-1}$ درحد بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ در میآید که طبق قاعدهٔ Hôpital آنچنانکه درآنالیز مذکور است باید از آن رفع ابهام کرد. برای اینمنظور کافی است ازصورت و مخرج این کسر برحسب γ مشتق گرفته وحد خارج قسمت جدید رامحاسبه کرد. بسهولت دیده میشود که:

$$\frac{d}{d\gamma}\log_n\gamma=\frac{1}{\gamma}$$

و

$$\frac{d(\gamma-1)}{d\gamma}=1$$

پس:

$$\text{حد}\left(\frac{\log_n\gamma}{\gamma-1}\right)=\text{حد}\;\frac{\frac{1}{\gamma}}{1}=\text{حد}\;\frac{1}{\gamma}\quad\text{یا}\quad=1$$

پس M بصورت زیر نوشته خواهد شد :

$$M = \frac{M_\circ}{۴}[۲(۱-\nu)+۲(۱+\nu)] = \frac{۴M_\circ}{۴} = M_\circ \qquad (\text{۳۶ الف})$$

از اینجا بارعایت معادله(۳۴ب) خواهیم داشت :

$$W = \frac{M_\circ}{۲D(۱+\nu)}(a^۲-r^۲) \qquad (\text{۳۶ ب})$$

معادله‌های (۳۶ الف و ب) همان معادله های (۹) و (۱۱ ب) میباشد که قبلاً بروش مستقیم محاسبه شده بود .

محاسبات بالا نشان میدهد که محاسبهٔ مستقیم آسانتر از روش غیرمستقیم فوق میباشد ولی این روش از لحاظ کنجکاوی آکادمیک قابل توجه وبررسی بوده است ؛ زیرا دیده میشود که لنگرهای خمشی وتغییر شکل صفحه را وقتیکه درلبه تحت تأثیر لنگر خمشی ثابتی باشد نمیتوان مانندتیرها از مشتق گرفتن عبارت این توابع برحسب r ، درهریک ازدوحالت بارگذای خطی هموار درطول لبه یا قبل ازآن بدست آورد . پس این سؤال پیش میآمد که آیا بارعایت اساس اینطریقه میتوان به نتیجهٔ مطلوب رسید ؟ درقسمت اخیر این مقاله با ارائهٔ روش محاسبه باین سؤال جواب گفته شده است .

توضیح - فهرست مراجع این مقاله همانست که درمقاله های گذشتهٔ اینجانب در نشریهٔ دورهٔ دوم دانشکدهٔ فنی ذکر وچاپ شده است .