سنجش و محاسبه متریک بلورها

مطالعه بلورشناسی توپاز

نوشته‌ی

دکتر حسین عرفانی

استادیار دانشکده علوم

۱ ـ مفهوم «متریک» در بلورشناسی

بلورها مانند سایر اجسام دارای سه‌بعد هستند و باین جهت موقعیت اجزاء آنها را بوسیله سه محور مختصات **X** , Y , Z مشخص میکنند. زوایای بین این سه‌محور متقاطع در سیستم‌های مختلف تبلور متفاوت‌اند و ازاین نظر آنها را با علائم خاصی معرفی مینمایند: زاویه بین محورهای Y , Z با علامت α؛ زاویه بین محورهای X , Z باعلامت β و زاویه بین محورهای X , Y باعلامت γ نشان داده میشود.

موقعیت هرسطح بلور بوسیله نسبت تقاطع آن سطح از محورهای فوق مشخص میگردد. اگر مقدار قطع شده از محور X را با علامت a و مقدار قطع شده از محور Y را با علامت b و مقدار قطع شده از محور Z را باعلامت c نشان دهیم: نسبت a : b : c عبارت از نسبت تقاطع یک سطح معین از محورهای مختصات فوق است [1]. از روی همین مقادیر قطع شده و یا مقایسه آنها با نسبت تقاطع یک سطح دیگر که بعنوان سطح واحد و یا سطح مقایسه‌ای انتخاب میگردد اندیس‌های میلر هرسطح محاسبه میشود. سطح واحد یا سطح مقایسه بسطحی اطلاق میشود که درآن مقدار قطع شده از هر محوری بعنوان واحد منظور میگردد و دراین‌صورت اندیس میلر آن که عبارت از عکس نسبت تقاطع آن‌سطح از محورهاست بصورت کلی { ۱۱۱ } معرفی میشود.

a , b , c و α , β , γ بنام متریک بلور و یا ثابت‌های کریستالوگرافیک آن نامیده میشوند.

۲ ـ روشهای نمایش بلور

درکتب درسی قدیمی فرانسوی و آلمانی معمول براین بوده است که بارسم شکل بلور که درآن

۱ ـ محور مختصات سه‌گانه را در بلورشناسی صلیب محورها می‌نامند.

سطوح ویالها وعناصر تقارن را باعلائم نشان میدادند آنرا معرفی کنند. ازنظر تعیین دقیق موقعیت سطوح، زوایای دوسطحی واندیس آنها این روش بمناسبت عدم راهنمائی کافی جهت درك موضوع بنابدلایل زیر از مدتها پیش متروك گردیده است :

الف ـ در رسم‌شکل، زوایا بهیچوجه بطور صحیح نشان‌داده نمیشوندواصولاً رسم شکل‌مستلزم‌صرف وقت‌زیاد بوده‌وتنها فایده‌اش‌حصول یك‌ایده ازوضع ظاهری بلوراست. چون‌بسیاری‌از بلورها باوجودتفاوت‌آنها از نظر سیستم تبلور ظاهراً شکل مشابهی دارند وعلاوه براین درموقع تشکیل یك بلور همواره فرم‌های‌ممکن درنمونه های‌مختلف‌آن ایجاد نمیشوند، بنابراین رسم‌شکل نمیتواند کمك‌موثری به‌شناسائی‌واقعی‌سیستم، کلاس وفرم های تبلوریك بلور بنماید.

ب ـ درمحاسبات متریك بلور که یك روش علمی برای تحقیق بلورشناسی‌مورفولژی است‌رسم‌شکل برای اخذ یك استنباط علمی نقش مهمی ندارد.

روش متداول برای معرفی یك بلور رسم تصویر فضائی آن است که درآن صرفنظر از اینکه اجزاء یك بلور از نظر زوایا بطور دقیق مشخص میگردند با استفاده از فرمول‌های هندسی، امکانات زیادی برای محاسبه متریك بلور ارائه میشود.

تصویر فضائی Stereographic Projection

برای رسم تصویر فضائی بلورها اساس کار براین‌است که‌بلور را بصورت یك جسم فضائی‌درداخل کره‌ای محاط ویا محیط فرض میکنیم واز مرکز این کره عمودهائی بسطوح مختلف آن‌رسم مینمائیم. محل تقاطع‌این خطوط‌باسطح کره‌بنام‌قطب های‌آن‌سطوح نامیده‌میشوند. بعبارت‌دیگر، اگرفرض کنیم که سطوح یك بلور آنقدر بموازات‌خود از مرکز کره‌دور شوندتادرنقاطی‌باسطح کره‌مماس گردند، نقاط تماس‌آنهاباکره‌عبارت از قطب‌های سطوح مختلف بلور میباشند. دراین تصویرهریك ازسطوح بصورت نقطه‌ای در روی کره‌نمایانده میشود. اگر چند سطح موازی مثلاً سطوح یك فرم‌منشوری که یك منطقه را در روی بلور معرفی‌مینمایند وجود داشته‌باشند مکان هندسی نقاط قطبی آنها بصورت دایره عظیمه‌ای در روی این کره ظاهر میشود. سطح این دایره‌از مرکز کره‌عبور مینماید. چنانچه‌مناطق‌بیشماری دریك بلور وجود داشته‌باشند این‌مناطق بصورت مدارات نصف‌النهار ویا دایره استوائی کره (یکی از آنها) نشان داده میشوند. در روی هریك ازاین دوایر نمایش تعداد زیادی سطح امکان پذیر است. زوایای بین این سطوح و موقعیت آنها در روی کره دقیقاً تعیین میشود.

تصویر فضائی بلور با توضیح فوق دو خاصیت مهم دارد :

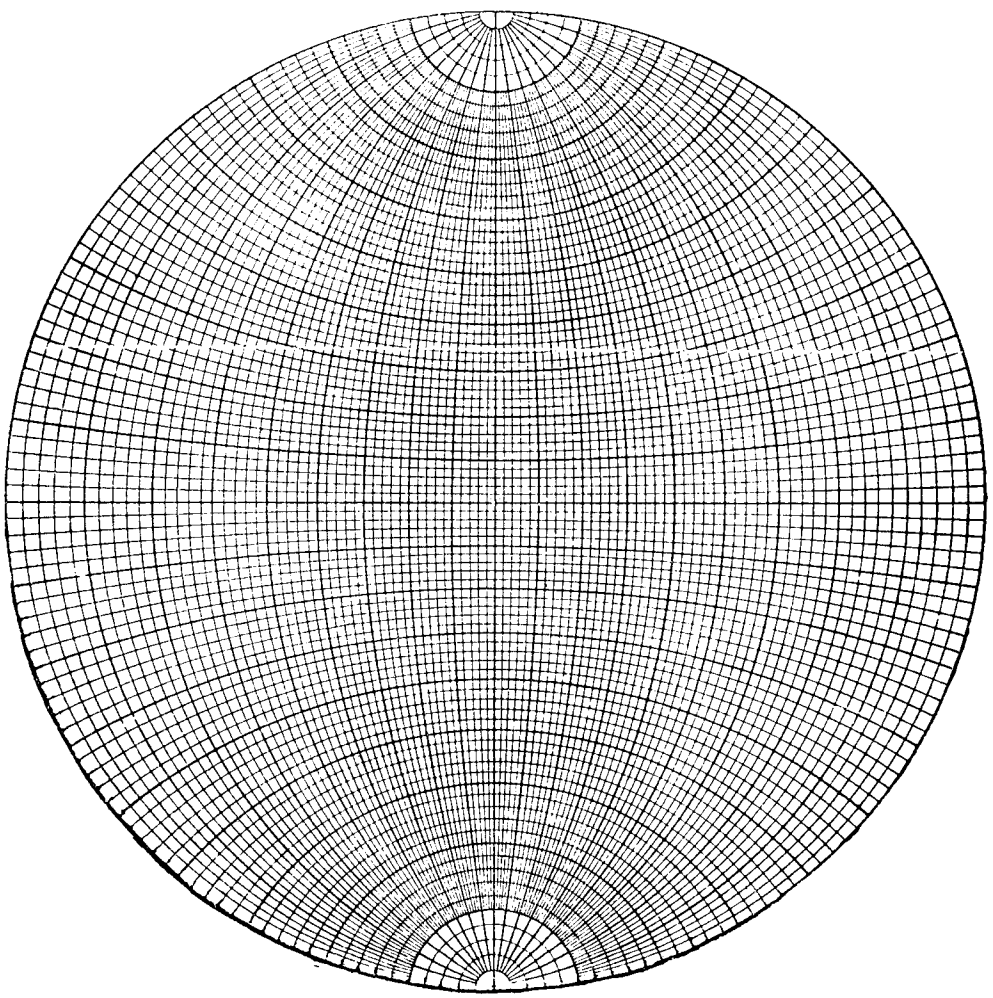
اول اینکه تمام مناطق موجود دریك‌بلور بصورت دوایر بزرگ‌در روی تصویر رسم‌میشوند.

دوم اینکه مقدار زوایای بین سطوح بلورها بطور ثابت نمایانده میشود و امکان نمایش نتایج سنجش‌های عملی را در روی تصویر فضائی بطور صحیح ارائه میدهد.

تجسم چنین تصویری مستلزم داشتن یک مدل فضائی است که معمولاً درآزمایشگاهها برای تمرینهای بلورشناسی از آن استفاده میکنند . درعمل سنجش و محاسبات از تصویراین کره در روی صفحه کاغذاستفاده میشود . باین ترتیب که کره را در روی کاغذ طوری قرار میدهند که محور Z آن عمود بر صفحه کاغذ باشد ودر اینصورت محور Z بصورت نقطه‌ای درمرکز تصویر و دومحور Y و X بصورت دوخط متقاطع درجهت اقطار طولی وعرضی دایره رسم می‌شوند . محیط دایره حاصل تصویر دایره عظیمه استوائی کره است .

شبکه وولف Wulff Net

در سال ۱۹۰۲ برای اولین بار ایده نمایش بلور به طریقه رسم تصویرفضائی آن به وولف امکان داد که شبکه‌ای برای سهولت ترسیم تصویر تهیه کند . این شبکه بنام خوداو نامیده شد . شبکه وولف تصویرفضائی دوایر بزرگ (دایرهٔ استوائی و نصف‌النهارات) کره است که با فواصل دو درجه‌ای در روی صفحه کاغذرسم



(شکل ۱ ـ شبکه وولف) .

شده‌اند. برای انطباق تصویر با این شبکه که بصورت دایره‌ای رسم میشود نقطه Z برمرکز این دایره و دوقطر دیگر آن درجهات دوقطر عمود برهم آن رسم میشود ، قطبهای سطوح موازی محور Z بصورت نقاطی در روی محیط دایره شبکه وقطبهای سایر سطوح که در بخش فوقانی بلور هستند بحسب موقعیت آنها درنقاط مختلف درون دایره جای میگیرند (شکل ۱) .

برای رسم تصویر کافی است که شبکه وولف را روی یک میز ثابت کنیم وصفحه کاغذ شفافی را که نور ازآن عبور میکند روی آن قرار دهیم . با چرخاندن کاغذشفاف درحول یک میخ ویا سنجاقی که ازمرکز کاغذ و شبکه عبور میکند نقاط مختلف کاغذرابه نقطه دلخواهی از شبکه میتوان منطبق کرد .

۳ ـ محاسبه «متریک» بلور

برای محاسبه متریک بلور مقدمتاً سنجش زوایای دوسطحی آن لازم است . بارسم تصویر فضائی بلور از روی معلومات حاصل ازسنجش زوایا میتوان متریک سطحی را که بعنوان سطح واحد یا سطح مقایسه‌ای در نظر گرفته میشود محاسبه کرد وبالاخره اندیس سطوح مختلف دیگر را با استفاده از قانون کمپلیکاسیون(۱) ویابا مقایسه نسبت تقاطع آنها باسطح مقایسه‌ای بدست آورد .

برای این نوع محاسبات که درواقع نوعی تحقیق بلورشناسی از نظرشکل خارجی است بدوآسعی میکنیم طریق رسم ومحاسبه را با دردست داشتن معلوماتی از زوایای دوسطحی بلور که بوسیله سنجش با گونیومتر بدست آمده است شرح دهیم وبعداً متد سنجش با گونیومتر و محاسبه را بطور مفصل بیان کنیم و در خاتمه یک نمونه کامل ازسنجش ها و محاسباتی که بوسیله نگارنده در روی بلورهای توپاز بعمل آمده است ذکر کنیم .

الف ـ محاسبه متریک بلور از راه معلومات زوایای دوسطحی آن :

مسئله :

از یک بلور زوایای دوسطحی بشرح زیراندازه گیری شده‌اند :

$$(۱۰۰)\diagup\diagdown(۰۱۰) = ۸۶^\circ$$

$$(۱۰۰)\diagup\diagdown(۰۰۱) = ۸۲^\circ$$

$$(۰۱۰)\diagup\diagdown(۰۰۱) = ۷۸^\circ$$

---

۱ ـ اندیس یک سطح که درنقطه تقاطع دو منطقه قرار می گیرد برابرمجموع جبری اندیس دوسطح از هرمنطقه تقاطع است که نزدیکترین رانسبت بسطح مطلوب دارند. از روی این قاعده که به قاعده کمپلیکاسیون موسوم است میتوان اندیس سطح مورد نظر را تعیین کرد (برای اطلاع بیشتر به شماره ۹ بخش منابع این مقاله مراجعه شود).

$$(010)\angle(111) = 55^\circ$$

$$(100)\angle(111) = 40^\circ$$

مطلوبست :

اولاً : نمایش این‌سطوح در روی تصویر فضائی بلور .

ثانیاً : تعیین محل تلاقی محورهای X و Y با تصویر (نقطه مرکزی تصویر همیشه با تصویر محور Z منطبق میشود !) .

ثالثاً : تعیین مقدار زوایای α , β , γ .

رابعاً : تعیین سطح واحد یا مقایسه‌ای واندیس سطوح مختلف دیگر .

خامساً : محاسبه نسبت تقاطع محورها برای سطح واحد $\{111\}$.

حل مسئله :

کاغذ شفافی را روی شبکه وولف قرار میدهیم ونقطه مرکزی آن را برمرکز شبکه‌منطبق کرده با باعلامت Z مشخص میکنیم وبعد دایره محیط شبکه را روی صفحه کاغذ شفاف منتقل میکنیم .

با مراجعه بصورت مسئله که درآن زوایای دوسطحی تعدادی از سطوح بلور سنجیده شده‌اند میتوان محل آنها را روی صفحه کاغذ مشخص کرد . معمولاً نقطه قطبی سطح (۱۰۰) را در پائین‌ترین نقطه محیط دایره مشخص می کنند . زیرا سطح (۱۰۰) اولاً روی محیط شبکه قرار میگیرد (۱) وثانیاً این سطح معمولاً در جهت عمود بر محور X است که درهمین قسمت دایره باتصویر متقاطع میشود (۲) . باتعیین محل سطح (۱۰۰) سطح قرینه آن یعنی $(\bar{1}00)$ بفاصله ۱۸۰ درجه روی تصویر تعیین میگردد .

اولاً نمایش‌سطوح:

نمایش سطح (۱۰۰) : این سطح با سطح (۱۰۰) مقدار ۸۶ درجه فاصله دارد وچون محور Y را قطع میکند نقطه قطبی آن درسمت راست سطح (۱۰۰) ودر روی محیط دایره (۱) قرار میگیرد . بااین‌ترتیب بدون اینکه صفحه کاغذ را از محل خود تغییر دهیم میتوانیم بمقدار ۸۶درجه روی صفحه کاغذ بسمت‌راست بشماریم و محل این سطح وهمچنین سطح قرینه آن یعنی $(0\bar{1}0)$ را مشخص کنیم .

نمایش‌سطح (۱۰۰) : این سطح بمناسبت تقاطع آن با محور Z در داخل دایره شبکه قرار میگیرد

---

۱ ـ سطح (۱۰۰) و سطح (۰۱۰) موازی محور Z هستند وتمام سطوح موازی محور Z در روی محیط‌دایره شبکه قرار میگیرند .

۲ ـ سطح (۱۰۰) فقط محور X را قطع مینماید .

و برای مشخص کردن موقعیت آن ناگزیر از دومقدار معلوم مسئله استفاده می‌کنیم. این دومقدار عبارتنداز:

$$(100)\angle(001) = 82^\circ$$

$$(010)\angle(001) = 78^\circ$$

این دو مقدار فاصله قطب سطح مطلوب را با قطب‌های دوسطح معلوم دیگر بما داده است و کافی است که دو منحنی کمکی چنان رسم کنیم که یکی از آنها باقطب سطح (۱۰۰) بمقدار ۸۲ درجه و دیگری با قطب سطح (۰۱۰) بمقدار ۷۸ درجه فاصله داشته باشد. محل تقاطع این دو منحنی موقعیت سطح (۰۰۱) را مشخص می‌کند.

طرز رسم منحنی‌های کمکی باین قرار است:

نخست از نقطه قطب (۱۰۰) و روی قطر طولی شبکه ۸۲ درجه می‌شماریم و در همین محل نیمدایره‌ای که روی شبکه وولف وجود دارد روی صفحه کاغذ رسم می‌کنیم و بعد با چرخاندن صفحه کاغذ نقطه (۱۰۰) را به محل قطب قطر طولی منطبق کرده و مقدار ۷۸ درجه می‌شماریم و منحنی آنرا نیز رسم میکنیم. دومنحنی رسم شده درنقطه‌ای متقاطع میشوند که محل قطب سطح (۰۰۱) را مشخص‌میکند. این نقطه از قطب سطح (۱۰۰) بفاصله ۸۲درجه واز قطب سطح (۰۱۰) بفاصله ۷۸ درجه قرارگرفته‌است.

نمایش‌قطب سطح (۱۱۱): برای تعیین موقعیت این سطح نیز که در داخل دایرهٔ تصویر قرار میگیرد از دومنحنی کمکی دیگر استفاده میکنیم و برای این منظور دو مقدار معلوم در صورت مسئله یعنی:

$$(010)\angle(111) = 55^\circ$$

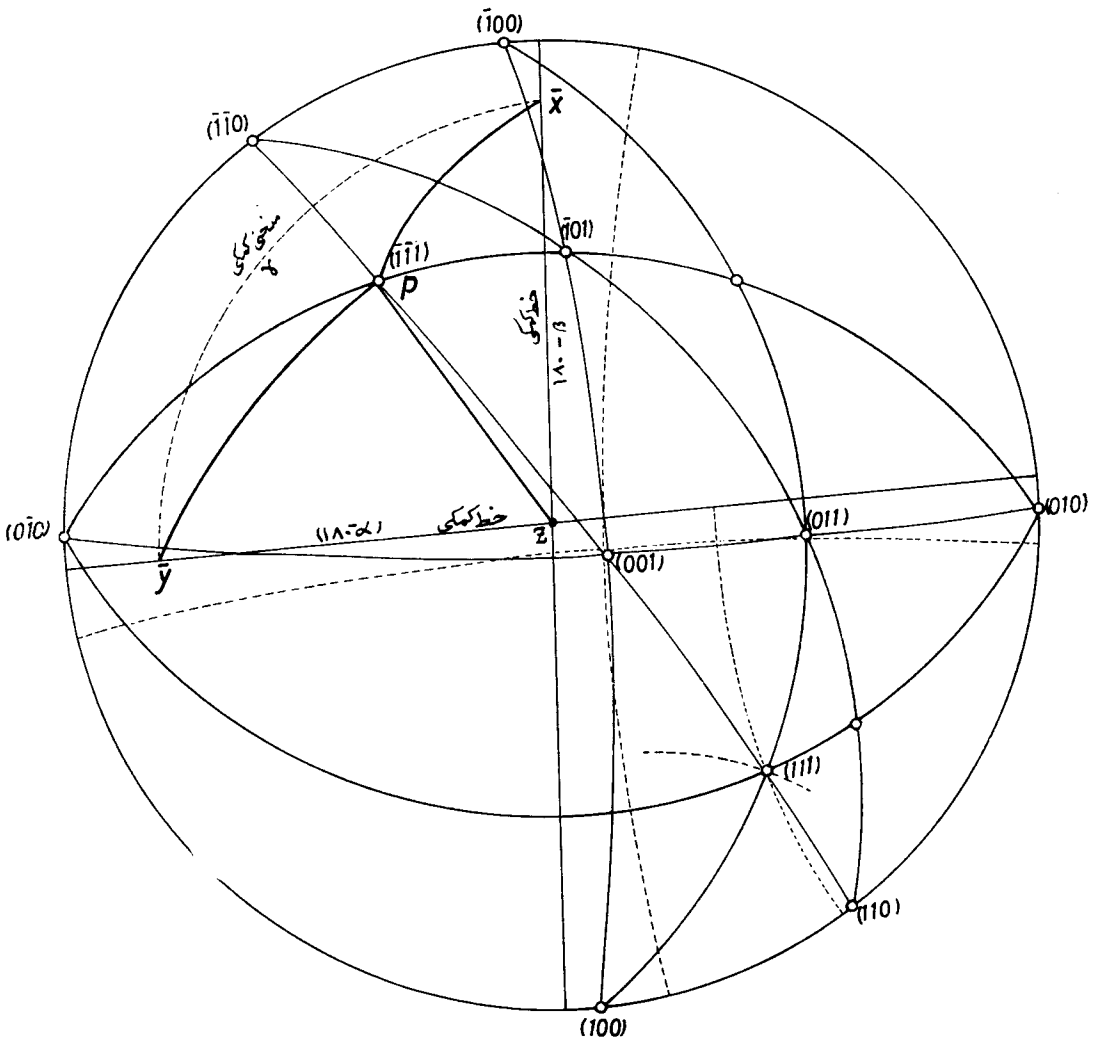
$$(100)\angle(111) = 40^\circ$$

بما کمک می‌کنند. منحنی‌های کمکی را بهمان طریق مذکور در فوق رسم‌می‌کنیم نقطه تقاطع آن دومنحنی موقعیت قطب سطح (۱۱۱) را مشخص‌می‌کند.

ثانیاً تعیین محل تلاقی محورهای X و Y باسطح تصویر:

در عده‌ای از سیستم‌های تبلور که سه محور X, Y, Z برهم عمودند محورهای X, Y منطبق بر دوقطر طولی وعرضی دایره‌میگردند وباین ترتیب دونقطه انتهائی آنها در روی تصویر مشخص میشود. لیکن در سیستم‌های دیگر بمناسبت تمایل این محورها از حالت عمودی، فقط یک انتهای آنها با تصویر متقاطع میشود ونقطه انتهائی دیگر نسبت به‌نیمکره بالا ویا نیم بلوری که تصویر آن را رسم‌می‌کنیم بطور مایل قرار میگیرد. برای پیدا کردن محل تقاطع محورها با تصویر باید به‌تجسم فضائی سطوح مربوط بشکل ساده هر سیستم و محل محورها توجه بیشتری داشته باشیم، با این توضیح:

چون محور Y موازی یال مشترك سطوح (۰ ۰ ۱) و (۰ ۰ ۱) منظور شده است بنابراین نقطه انتهائی آن از نقطه قطبی سطوح فوق الذکر بمقدار ۹۰ درجه فاصله زاویه‌ای خواهد داشت. بهمین طریق چون محور X موازی یال مشترك سطوح (۰ ۱ ۰) و (۰ ۱ ۰) منظور میشود بنابراین نقطه انتهائی آن بانقاط قطبی این دو سطح ۹۰ درجه فاصله دارد. اگر یک منحنی کمکی رسم کنیم که از سطح (۰ ۰ ۱)، ۹۰ درجه فاصله داشته باشد باید محلهای تقاطع محورهای X , Y با تصویر روی این منحنی قرار بگیرند و برای تعیین موقعیت دقیق این دو محور برای هریک از آنها یک خط کمکی دیگر چنان رسم میکنیم که یکی از آنها باسطح (۰ ۰ ۱) و دیگری باسطح



شکل ۲ - تصویر فضائی مسئله

(۰ ۱ ۰) بمقدار ۹۰ درجه فاصله داشته باشد. محل تقاطع این دو خط کمکی با منحنی کمکی موقعیت X , Y یعنی محل تقاطع آنها را با تصویر مشخص میکند. این نقاط ممکن است در ربع مثبت دایره و یا منفی آن قرار بگیرند. بطوری که در تصویر ملاحظه میگردد (شکل ۲) محل تقاطع این محورها با تصویر در ربع منفی دایره برای مسئله مورد بحث ما پیدا شده است ($\overline{X}$ و $\overline{Y}$).

ثالثاً : تعیین مقدار زوایای α , β , γ

برای تعیین زاویه α تصویر را روی شبکه آنقدر می‌چرخانیم تا نقطه $\bar{Y}$ روی یکی از دوقطر دایره شبکد قرارگیرد وآنگاه زاویه بین $\bar{Y}$, Z را با شمارش درجات تعیین می کنیم :

برای‌تعیین مقدار زاویه β همین عمل را برای نقطه $\bar{X}$ انجام میدهیم‌وباشمارش درجات‌بین $\bar{X}$, Z مقدار β را بدست میآوریم .

برای‌تعیین‌مقدار γ تصویر را آنقدر میچرخانیم تا قوس کمکی $\bar{X}$ $\bar{Y}$ روی یکی از دوایرنصف‌النهار قرار گیرد و بعد زاویه آنها را باشمارش درجات تعیین‌میکنیم .

تبصره :

در مسئله مورد مطالعه ما نقاط X , Z در ربع منفی دستگاه مختصات پیداشده‌اند . ازآنجا که زاویهٔ α زاویه بین Y , Z و مکمل آن زاویه بین $\bar{Y}$, Z است لازم می‌آید که مقدار بدست آمده از شمارش فوق‌را از ۱۸۰ درجه کسر کنیم تا مقدار واقعی α تعیین گردد . این روش در مورد مقدار زاویه β نیز صادق است . لیکن زاویه γ که زاویه بین Y , X است چون بازاویه $\bar{X}$, $\bar{Y}$ برابر است (دوزاویه متقابل‌براس) بنابراین مقدار بدست آمده از سنجش آن در ربع مثبت ویا منفی برابر است .

مقدار α باندازه ۳۰۱ درجه و مقدار β باندازه ۹۸ درجه وبالاخره‌مقدار γ باندازهٔ ۹۳ درجه‌درتصویر فضائی‌این‌مسئله بدست می‌آید .

رابعاً : تعیین سطح واحد یا مقایسه‌ای واندیس‌های سطوح دیگر :

چنانکه قبلاً متذکر شدیم هرمنطقه‌مکان هندسی‌نقاط‌بیشماری‌است که هریک از آنها نقطه‌قطبی‌یک سطح بلور را نشان میدهد . بااین تعریف در روی هر منطقه نقاط قطبی سطوح متعددی ممکن است وجود داشته باشند که مادر موقع رسم مناطق بادرنظر گرفتن موقعیت سطوح مطلوب وبا مراعات صرفه‌جوئی در رسم آنها فقط مناطق‌مورد احتیاج‌رادر روی‌تصویر میکشیم . در رسم‌یک منطقه دونکته‌را همواره‌باید درنظر داشت :

اولاً : یک منطقه موقعی قابل ترسیم است که لااقل دونقطه آن در داخل دایره تصویر مشخص باشند مثلاً در تصویر مسئله‌ما دونقطه (۱۱۱) و (۰۰۱) میتوانند منطقه معینی را مشخص کنند .

ثانیاً : امکان رسم‌یک منطقه‌در حالتی که‌فقط‌یک‌نقطه‌مشخص‌در داخل‌ودونقطه‌قرینه‌در روی‌محیط دایره وجود داشته باشد نیز بدست میآید و باین‌ترتیب مثلاً ازسه‌نقطه (۱۱۱) در داخل دایره و (۰۰۱) و ($\bar{1}$۰۰) یک منطقه میتوان رسم کرد و همینطور سه‌نقطه (۱۱۱) و (۰۱۰) و (۰$\bar{1}$۰) منطقه دیگری را مشخص میکنند .

قاعده براین‌است که‌برای رسم‌این مناطق درحالتی که‌فقط دونقطه‌مشخص درداخل‌دایره‌تصویروجود داشته باشد سعی‌میکنیم باچرخاندن کاغذ در روی شبکه وولف این دونقطه را برروی یک دایره نصف‌النهار

ممکن منطبق کنیم وبعد همان دایره را روی کاغذشفاف رسم نمائیم . در حالتی که دوسطح قرینه در روی محیط دایره باشد این دونقطه را به دوقطب تصویر منطبق می کنیم ویکی از نصف النهارات را که ازقطب شمال به قطب جنوب کشیده میشود واز نقطه سوم (یعنی نقطه واقع در داخل دایره) می گذرد رسم می نمائیم .

بادرنظر گرفتن امکانات بی شماری که برای رسم مناطق وجود دارند میتوان پیش بینی کرد که باتقاطع آنهانیز نقاط متعددی بدست می آیند . هریک ازاین نقاط امکان وجود یک سطح را ارائه میدهد وباتعیین اندیس آنها از روی قاعده کمپلیکاسیون میتوانیم آنها را مشخص کرده وبین آنها سطوح مطلوب خودرا پیدا کنیم .

پیدا کردن سطح واحد یعنی یک سطح انتخابی که اندیس آن بااندیس فرم $\{111\}$ ازنظرمقدار عددی برابر است بارسم مناطق مورد احتیاج صورت میگیرد . ذکر این نکته الزامی است که محل قطب این سطح باید در ربع دایره ای پیداشود که درآن محورهای Z,Y,X باتصویر متقاطع میگردند . گرچه از نظر بدست آوردن نتیجه مطلوب ، در محاسبات بعدی هیچگونه تغییری ایجاد نمیشود لیکن از نظر سهولت عمل دراستفاده از فرمول های هندسی مراعات این نکته الزامی است . مثلا درتصویر این مسئله محل Y ، X دربع دایره ۳ مشخص شده اند و بنابراین سطحی از فرم $\{111\}$ را در این ربع دایره پیدا می کنیم . اندیس این سطح همان $(\bar{1}\bar{1}1)$ است که بارسم مناطق مورد احتیاج پیدا می شود .

خامسا : محاسبه نسبت تقاطع محوری برای سطح واحد

برای محاسبه نسبت مقادیر قطع شده از سه محور Z,Y,X برای سطح $(\bar{1}\bar{1}1)$ یعنی سطح واحد از فرمول زیر استفاده میشود :

$$a : b : c = \frac{\cos PY}{\cos PX} : 1 : \frac{\cos PY}{\cos PZ}$$

که درآن P نقطه قطبی سطح واحد و PZ,PY,PX فاصله زاویه ای سطح P از O یعنی نقطه تقاطع محورهاست

اثبات فرمول :

$$a:b:c = \frac{\cos PY}{\cos PX} : 1 : \frac{\cos PY}{\cos PZ}$$

فرض میکنیم که سطح $P(\bar{1}\bar{1}1)$ محورهای Z,Y,X را بفاصله زاویه ای OZ,OY,OX قطع کند . از نقطه O عمودی براین سطح دارد میکنیم که آنرا درنقطه P (قطب این سطح) قطع نماید (شکل ۳) .

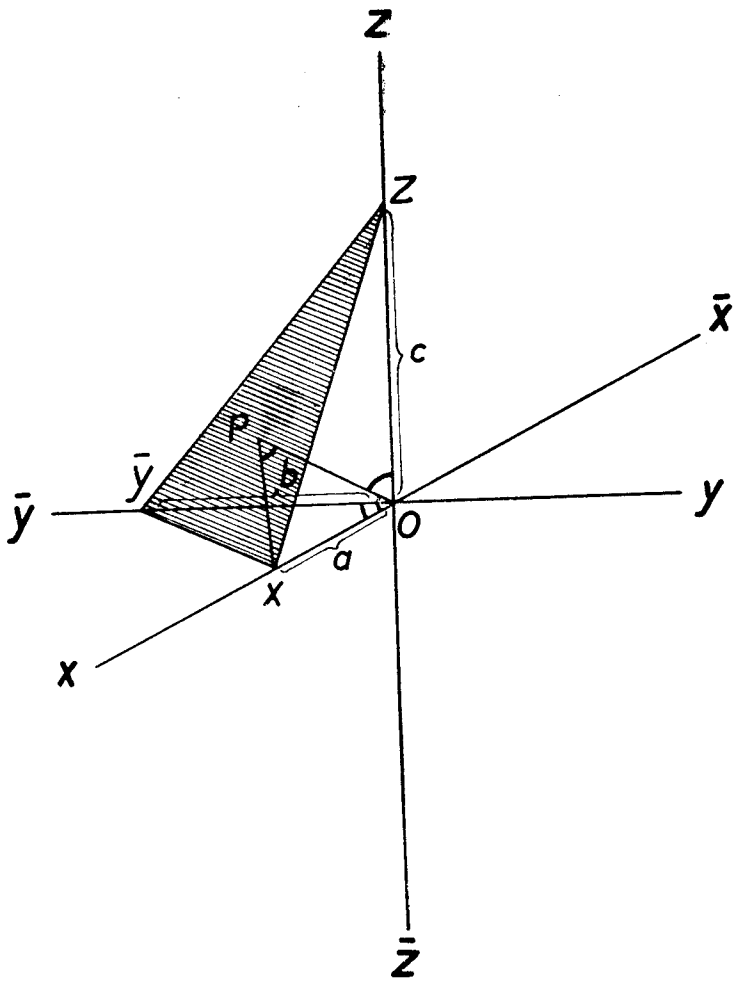
در مثلث های قائم الزاویه POZ , POX , POY میتوان رابطه های زیر را نوشت .

$$\cos POX = \frac{OP}{OX} = \frac{P}{a}$$

$$\cos POZ = \frac{OP}{OY} = \frac{P}{b}$$

$$\cos POZ = \frac{OP}{OZ} = \frac{P}{c}$$

مقدار P درسه رابطه‌فوق چنین محاسبه‌میشود :



شکل ۳ ـ مربوط به‌اثبات فرمول $a : b : c = \frac{cos PY}{cos PX} : ۱ : \frac{cos PY}{cos PZ}$

$$P = a \times cos PX$$

$$P = b \times cos PY$$

$$P = c \times cos PZ$$

اگر نسبت تقاطع محورها یعنی a : b : c را از فرمول بالا استخراج کنیم خواهیم داشت :

$$a : b : c = \frac{P}{cos PX} : \frac{P}{cos PY} : \frac{P}{cos PZ}$$

از ضرب کردن سه کسر فوق در $cos PY$ واز بخش کردن آنها در P فرمول بالا بصورت زیردرمیآید:

$$a:b:c=\frac{\cos PY}{\cos PX}:1:\frac{\cos PY}{\cos PZ}$$

باسنجش مقادیر PZ,PY,PX میتوان مقادیر مربوط به کسینوس آنها را تعیین کرده و درفرمول بالا قرارداد. در مسئله‌ما مقادیر آنها بمقیاس زیر سنجیده شده‌اند :

$$PX=۳۷^\circ$$
$$PY=۵۸^\circ$$
$$PZ=۶۳^\circ$$

واز آنجا نسبت تقاطع محورها بمقدار زیر محاسبه شده است :

$$a:b:c=۰٫۵۸۰۷:1:۰٫۸۱۵۹$$

وباین ترتیب متریک بلوری که مطلوب مسئله ما بود بدست‌آمده‌است.

٤ ـ محاسبه متریک بلور از راه سنجش عملی با گونیومتر

الف : گونیومتر Goniometer ـ گونیومتر دو دایره‌ای دقیق‌ترین نوع گونیومترهاست که برای سنجش زوایای دوسطحی بلورها بکار میرود .

طرزکار دستگاه : دسته اشعه‌موازی که‌از لوله‌ای‌بنام لوله کلیماتور (Collimator) خارج میشود بوسیله سطحی از بلور که درراس گونیومتر ثابت ومیزان شده است منعکس میگردد و درلوله‌ای بنام دوربین مشاهده وارد می‌شود و بچشم بیننده میرسد. بلور را میتوان حول دو محور عمود برهم A_1 و A_2 (شکل ٤) چرخاند . محور دوربین مشاهده ، درموقع سنجش ثابت میماند و درعین‌حال میتواند همراه کلیماتور برای سطوح دیگر باختیار ما بچرخد . با استعمال هر دو دایره گونیومتر موقعیت بلور را میتوان چنان تغییر داد که سطوح مختلف آن پشت‌سرهم نور وارده از کلیماتور را به دوربین‌مشاهده منعکس کنند . تفاوت عددی دو انعکاس متوالی مقدار زاویه بین دوعمود واقع در دوسطح را تعیین مینماید .

ساختمان گونیومتر : گونیومتر انعکاسی دو دایره‌ای از بخش‌های زیر تشکیل میشود .

۱ ـ سه‌پایه‌ای که روی زمین قرار میگیرد باپیچ های افقی.

۲ ـ پایه کلیماتور و کلیماتور.

۳ ـ ساقه متحرك برای دوربین مشاهده

٤ ـ دایره مدرج افقی باذره‌بین .

٥ ـ ساقه متحرك دایره مدرج عمودی .

٦ ـ رأس گونیومتر

برای بدست آوردن یک نور منعکس واضح معمولاً در لوله کلیماتور پنج‌نوع پنجره یاسیگنال کار گذاشته‌اند واین پنج‌سیگنال روی‌یک صفحه گرد قرار گرفته‌اند. باچرخاندن این‌صفحه گرد درحول محور آن

سیگنال های مختلف درمعبر نور قرار میگیرند و باین ترتیب اثر انعکاس نور باشکال مختلف دیده میشود. معمولاً اشکال سیگنال ها بصورت زیر ساخته شده‌اند:

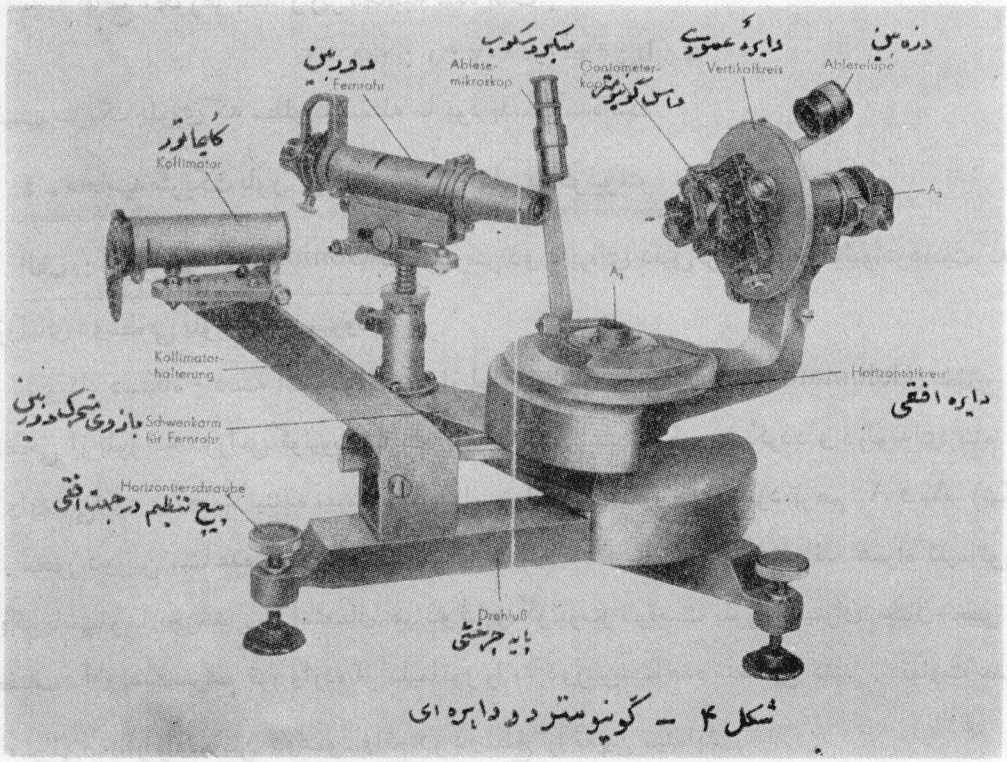
۱ - صلیب مالتزر (Malteser)

۲ - تصویر ویسکی (Websky)

۳ - صلیب معمولی.

٤ - نقطه.

٥ - کلیماتور بدون سیگنال.



شکل ۴ - گونیومتر دو دایره ای

دوربین مشاهده را میتوان بکمک پیچ هائی بطرف بالا ویا درجهت محوری نسبت به‌بلور تغییرداد و بوسیله پیچ مخصوصی محل آنرا ثابت نگهداشت. دوپیچ تنظیم در زیر دوربین مشاهده‌امکان می‌دهند که موقعیت بلور را درجهت‌عمودی ویاافقی تغییردهیم. برای تنظیم‌وسنجش بلور عدسی هائی شیئی‌وچشمی نیز در داخل دوربین مشاهده‌قرار گرفته‌اند. اگر در داخل دوربین فقط این دوعدسی را داشته باشیم و بقیه را از دوربین خارج کنیم فقط‌خودبلور را که دومرتبه بزرگ شده است می‌بینیم. بااضافه کردن‌دو ذره‌بین دیگر تصویر باندازه ۹ مرتبه بزرگتر میشود.

بلور مورد سنجش را روی راس گونیومتر قرارمیدهیم. رأس گونیومتر از دوسطح خمیده‌لغزنده‌تشکیل شده است که بصورت عمود برهم‌قرار گرفته‌اند. این دوسطح بوسیله پیچی موقعیت بلور را بطور کاملاً عمود یعنی درجهت طولی بلور برسطح افقی تنظیم می‌نمایند. دایره مدرج عمودی که با چرخش بلور روی آن در

حول محور A_2 میتوان زاویه را سنجید به زوایای نیم درجه‌ای تقسیم شده‌است وبوسیله یک ورنیه و ذره‌بین میتوان اجزاء درجه را تایک دقیقه تعیین کرد. تغییر زاویه را حول محور A_1 میتوان روی درجه افقی مدرج مشخص کرد.

تنظیم گونیومتر: قبل از شروع به‌سنجش، دستگاه باید تنظیم شود یعنی محورهای کلیماتور، دوربین مشاهده ودو دایره مدرج همه روی‌یک سطح قرارگیرند که برمحور قائم A_1 عمود است. هرسه‌این محورها باید A_1 را دریک نقطه قطع کنند. این‌عمل قبلاً درکارخانه انجام گرفته است معذلک قبل‌ازشروع بکار آزمایش و تنظیم اجزاء آن الزامی است.

تنظیم بلور در روی گونیومتر: بلور را بوسیله ماده‌ای مانند موم ویا شمع روی میله کوچکی ثابت کرده و درمحل مخصوصی که‌در راس گونیومتر برای آن تعبیه شده است بطور عمودی قرار میدهیم و بوسیله پیچ های تنظیم وبا تغییرموقعیت‌سطوح لغزنده رأس گونیومتر بلور را بصورت کاملاً عمودی برسطح افق‌ثابت می‌نمائیم. اگر عمل تنظیم بلور بدقت انجام بگیرد، تصویر سطوح فوقانی بلور با تغییر آن در حول‌محورهای A_1 و A_2 از پشت عدسی چشمی ملاحظه خواهد شد.

ب ـ سنجش و محاسبه متریک در بلورهای توپاز

توپاز بفرمول $(OH,F)_2Al_2[SiO_4]$، سیلیکات‌فلوئور و آلومینیوم، یکی‌از کانی‌های‌پنوماتولیتیک سنگ‌های درونی اسید(گرانیت‌ها و گرانیت‌پگماتیت‌ها وبندرت در پورفیرهای کوارتزو ترآکیت‌های کوارتز دار و هم‌چنین گنیس‌های مربوط بآنها) است که بصورت ماده حاصل از تجزیه متازوماتیک فلدسپات‌ها در سنگ‌های گرایزن واز طریق دگرگونی مجاورتی نیز دربعضی سنگ‌ها تشکیل میگردد.

مشخصات بلورشناسی این کانی عبارتنداز:

سیستم تبلور: ارتورومبیک بی‌پیرامیدال با عناصر تقارن: $A_2 \perp E$, $A_2 \perp E$, $A_2 \perp E$, C

فرم‌های مهم که در بلورهای توپاز ایجاد میشوند:

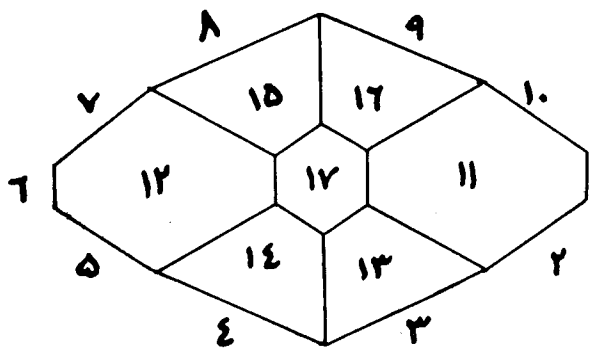
$$\{101\}, \{021\}, \{011\}, \{120\}, \{110\}, \{001\}, \{111\}, \{112\}$$

داری رخ خوب درجهت (۰۰۱) ودرسایر جهات بصورت ناصاف می‌شکنند. بصورت بلورهای منظم وگاهی ساقه مانند ودرپلاسه‌های سنگ‌های زینتی بصورت قطعات مدور وصاف پیدامیشود.

بعضی خواص فیزیکی‌آن‌عبارتند از: سختی‌برابر ۸، وزن‌مخصوص ۳٫۵ تا ۳٫۶، جلای‌شیشه‌ای، شفاف تانیمه شفاف، به‌رنگ زرد، آبی، گلی وسبز دیده میشود.

بلورهائی از توپازکه بوسیله‌نگارنده اندازه‌گیری و متریک آنها محاسبه شده‌اند بطول یک‌سانتی‌متر و به‌اقطار ۴ و۵ میلی‌مترمیباشند. سه‌نمونه ازاین‌بلورها که از نظر تعداد فرم‌ها مشابه بودنداندازه‌گیری شدند

و محاسبات آنها با استفاده از معدل ارقام سنجیده‌شده درروی‌سه بلور انجام گرفت. قبل ازذکرارقام مربوطبه‌سنجش هامتذکر میشویم که همه این بلورها واجد تمام فرم های ممکنه نبودند وبرای اینکه‌سطوح مختلف‌آنرا باعلائمی ویاشماره‌ای مشخص کنیم یک‌تصویرعمودی باشاهده‌بوسیله ذره‌بین تهیه کردیم و سطوح آنرا شماره‌گذاری کرده سپس مبادرت به‌سنجش نمودیم (شکل ٥).



(شکل ٥)

جدول زیر ارقام مربوط به‌سنجش‌ها را نشان میدهد. دراین جدول اندیس‌های سطوح مختلف بلور هم که بعداً محاسبه شده است آمده‌است.

ارقام مربوط به‌سنجش زوایا دربلور توپاز

(hkl)	فاصله زاویه‌ای از مبداعمودی (ρ)	فاصله زاویه‌ای از مبدا افقی (φ)	سنجش درحول محورعمودی (V)	سنجش درحول محور افقی (H)	نوع انعکاس	شماره سطح
(٠١٠)	٩٠°	٠	٩٦°١٢′	٢٣٦°٠٠′	بسیارخوب	١
(١٢٠)	»	٤٤°٠٣′	٩٦°٢٠′	١٩١°٥٧′	» »	٢
(١١٠)	»	٦٢°٠٨′	٩٦°١٤′	١٧٣°٥٢′	» »	٣
(١$\bar{1}$٠)	»	١١٨°٠٠′	٩٦°٣٠′	١١٨°٠٠′	» »	٤
(١$\bar{2}$٠)	»	١٣٦°٢٤′	٩٦°١٩′	٩٩°٣٦′	» »	٥
(٠$\bar{1}$٠)	»	١٧٩°٥٤′	٩٦°١٢′	٥٦°٠٦′	» »	٦
($\bar{1}\bar{2}$٠)	»	٢٢٤°٤٠′	٩٦°٠٠′	١١°٢٠′	» »	٧
($\bar{1}\bar{1}$٠)	»	٢٤٢°١٣′	٩٦°١٤′	٣٥٧°٤٧′	خوب	٨
($\bar{1}$١٠)	»	٢٩٨°٠٠′	٩٦°١٢′	٢٩٨°٠٠′	»	٩
($\bar{1}$٢٠)	»	٣١٦°٠٧′	٩٦°١٠′	٢٧٩°٥٣′	»	١٠
(٠٢١)	٦٢°٠٢′	٠°	١٢٤°١٠′	٢٣٦°٠٠′	بسیارخوب	١١
(٠$\bar{2}$١)	٦٢°٢٠′	١٨٠°٣٦′	١٢٣°٥٢′	٥٥°٢٤′	» »	١٢
(١١١)	٦٤°٠٤′	٦٢°٠٨′	١٢٢°٠٨′	١٧٣°٥٢′	» »	١٣
(١$\bar{1}$١)	٦٤°١٢′	١١٨°١٠′	١٢٢°٠٠′	١١٧°٥٠′	» »	١٤
($\bar{1}$١١)	٦٤°٢٠′	٢٤٢°١١′	١٢١°٥٢′	٣٥٣°٤٩′	» »	١٥
($\bar{1}$١$\bar{1}$)	٦٤°٢٢′	٢٩٧°٥٧′	١٢١°٥٠′	٢٩٨°٠٢′	» »	١٦
(٠٠١)				١٨٦°٢١′	» »	١٧

محاسبه‌متریک :

الف ـ مقادیر α, β, γ :

این زوایا برابر ۹۰ درجه وباهم برابرند . مطالعه سطوح (۱۰۰) ، (۰۱۰) و (۰۰۱) در تصویر فضائی بلور که عمود برسه محور X,Y,Z هستند ، این موضوع را تائید میکند .

ب ـ محاسبه نسبت تقاطع محورها :

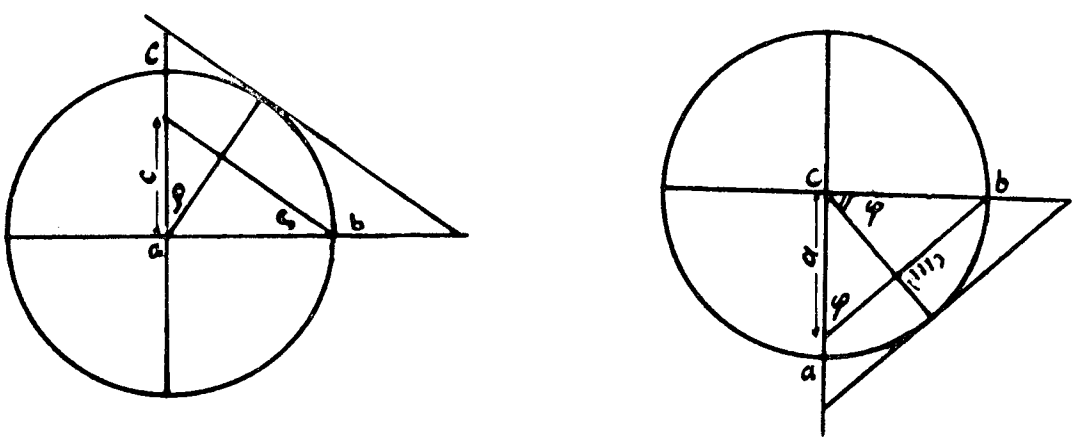
با انتخاب سطح شماره ۱۳ بعنوان سطح واحد، نسبت‌تقاطع محورها محاسبه شد. در مورداین‌سطح که‌مقدارφ برابر ۶۲°۰۸′ و ρ برابر ۶۴°۰۴′ محاسبه شده‌است مقادیر $\cos PX$ ، $\cos PY$ و $\cos PZ$ باملاحظه تصویر رسم شده از مثلث‌های فضائی بترتیب زیر محاسبه شدند (شکل ۶) .

$\cos PY$ از مثلث فضائی ABP باین‌ترتیب :

$$\cos PY = \cos BP \cdot \cos AB + \sin PB \cdot \cos\alpha \cdot \sin AB = \cos ۲۰°۰۶′ \times \cos ۶۲°۰۸′$$

$\cos PX$ از مثلث فضائی PBX بترتیب زیر :

$$\cos PX = \cos XB \cdot \cos PB = \cos ۲۷°۰۲′ \times \cos ۲۰°۰۶′$$



(شکل ۶)

و $\cos PZ$:

$$\cos PZ = \rho_{(111)} = ۶۴°۰۴′$$

از روی فرمول کلی محاسبه نسبت تقاطع محورها :

$$a : b : c = \frac{\cos PY}{\cos PX} : ۱ : \frac{\cos PY}{\cos PZ}$$

$$a : b : c = \frac{\cos ۲۰°۰۶′ \times \cos ۶۲°۰۸′}{\cos ۲۷°۰۲′ \times \cos ۲۰°۰۶′} : ۱ : \frac{\cos ۲۰°۰۶′ \times \cos ۶۲°۰۸′}{\cos ۶۴°۰۴′}$$

واز آنجا :

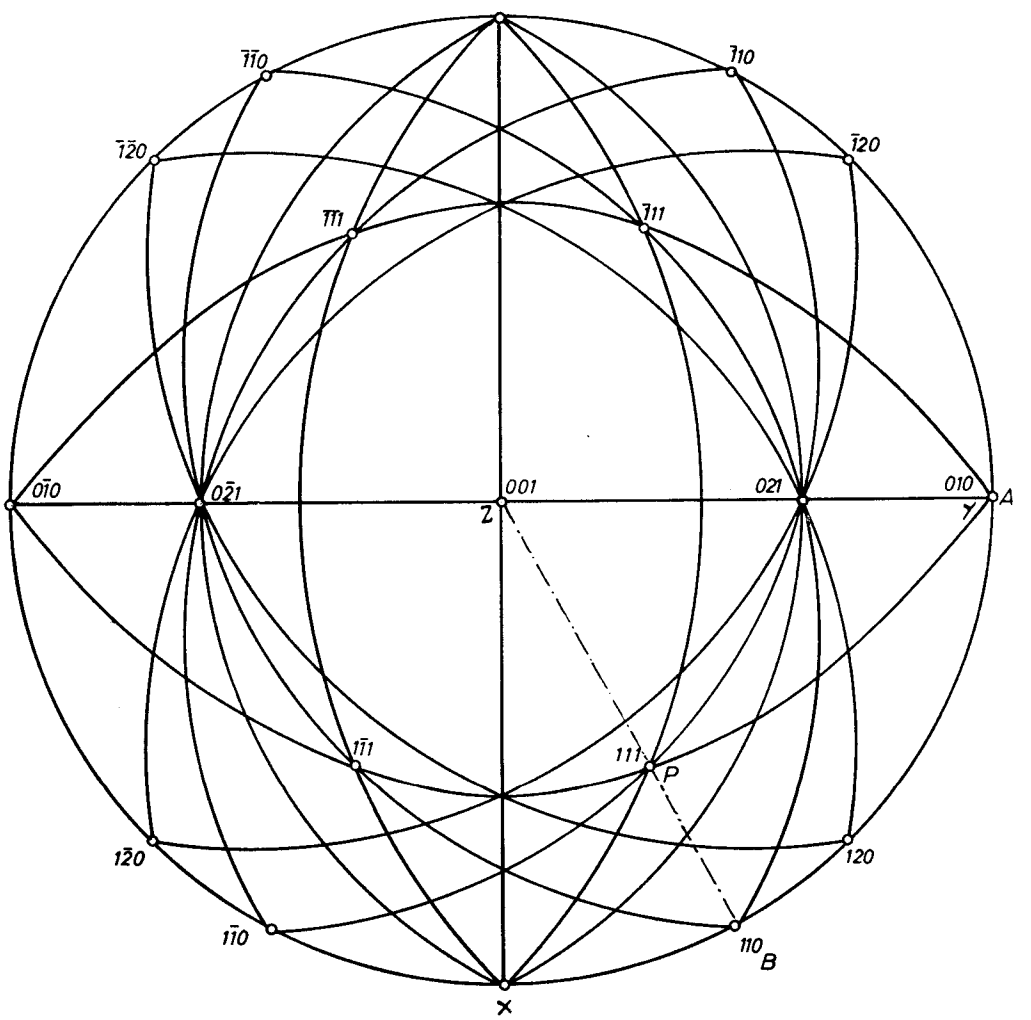
$$a : b : c = ۰٫۵۲۸۷۳ : ۱ : ۰٫۹۶۱۲$$

ج ـ محاسبه نسبت تقاطع محوری واندیس چند سطح دیگر :

شماره‌سطح	a	b	c	(bkl)
۲	$cotg\varphi = ۱٫۰۳۳۷۲$	۱	∞	(۱۲۰)
۳	$cotg\varphi = ۰٫۵۲۸۷۳$	۱	∞	(۱۱۰)
۱۱	∞	۱	$tg\rho = ۱٫۸۸۳۳۷$	(۰۲۱)

وسطوح نظیر آنها در ربع دایره‌های دیگر بااستفاده از قاعده کمپلیکاسیون(شکل ۷) :

شماره‌سطح	اندیس	شماره‌سطح	اندیس
۱۰	$(\bar{1}20)$	۱	(۰۱۰)
۱۲	$(0\bar{2}1)$	٤	$(1\bar{1}0)$
۱٤	$(1\bar{1}1)$	٥	$(12\bar{0})$
۱٥	$(\bar{1}\bar{1}1)$	٦	$(0\bar{1}0)$
۱٦	$(\bar{1}11)$	۷	$(\bar{1}20)$
۱۷	(۰۰۱)	۸	$(\bar{1}10)$
		۹	$(\bar{1}10)$



شکل ۷ ـ تصویر فضائی قوباز

Bibliography

1 - Flint,Y.Essentials of crystallography.Moscow.

2 - Goldschmidt,V.Kursus der Kristallometrie,Geb.Borntrager Verl. Berlin 1932.

3 - Jong,W.F.de.Kompedium der Kristallkunde.Wien 1959.

4 - Kleber,W.Einfuehrung in die Kristallographie.Berlin 1965.

5 - Machatschki, F.Grundlagen d.allgemeinen Mineralogie und Kristallchemie Wien 1964.

6 - Machatschki,F.Spezielle Mineralogie auf geochemischer Grundlage Wien 1953.

7 - Raaz,F. und Tertsch,H.Kristalloraphie, Wien 1958

8 - Raaz, F.Sphaerische Trigonimetrie fuer Naturwissenssenschaft und Technik Wien 1929.

۹-دکترحسین عرفانی - بلورشناسی - چاپ‌تهران - ۱۳٤٦